ZASTOSOWANIE PROCESU MARKOWA W MODELOWANIU SYSTEMU EKSPLOATACJI POJAZDÓW MECHANICZNYCH

APPLICATION OF MARKOV PROCESS IN MODELING SYSTEM OPERATION OF MOTOR VEHICLE

Marian BRZEZIŃSKI
marian.brzezinski@wat.edu.pl

Paulina ZDUNEK
paulina.zdunek@wat.edu.pl

Wojskowa Akademia Techniczna
Wydział Logistyki
Instytut Logistyki

Streszczenie: Jednymi z najczęściej wykorzystywanymi w modelowaniu matematycznym procesami stochastycznymi są procesy Markowa. Stanowią one grupę metod analitycznych opartych na analizie procesów losowych, których podstawą jest określenie prawdopodobieństwa przejścia warunkowego. Zaprezentowany w artykule model jednorodnej odnowy prostej dla pojazdów mechanicznych może stanowić podstawę do efektywnego planowania zadań w systemie eksploatacji w danym przedsiębiorstwie.

Abstract: One of the most commonly used in mathematical modeling of stochastic processes is the Markov processes. They are a group of analytical methods based on the analysis of random processes based on the determination of the probability of a conditional transition. Presented in the article homogeneous model of simple renewal for motor vehicles can be the basis for effective planning of tasks in the system of operation in a enterprise.

Słowa kluczowe: procesy stochastyczne, proces Markowa, eksploatacja, modelowanie

Key words: stochastic processes, Markov process, exploitation, modeling

WSTĘP

Procesy stochastyczne są obecnie jednym z najbardziej rozwiniętych narzędzi badawczych wykorzystywanych do opisu dynamiki układów złożonych. Aby podejmować optymalne decyzje w zakresie eksploatacji złożonych systemów technicznych oraz aby doskonalić ich budowę i funkcjonowanie należy prowadzić badania z wykorzystaniem modeli, stanowiących podstawowy warunek realizacji procedur transformacji.

Celem artykuły jest analiza procesów stochastycznych oraz charakterystyka specjalistycznych metod obliczeniowych tj. procesów Markowa. Zaprezentowana metodologia badań procesów markowa posłużyła jako narzędzie do rozwiązania problemu badawczego związanego z określeniem prawdopodobieństwa przejścia obiektów ze stanu zdatności do stanu niezdatności oraz do określenia stacjonarnej liczby pojazdów do odnowienia w wyznaczonym okresie eksploatacji. Efektem przeprowadzonych badań jest model jednorodnej odnowy prostej dla rzeczywistej zbiorowości pojazdów mechanicznych danej firmy transportowej.

Zastosowane metody badawcze oparte na analizie literatury oraz przeprowadzonych obliczeń potwierdziły słuszność i poprawność zastosowania procesów Markowa do modelowania systemu eksploatacji pojazdów mechanicznych w zakresie teorii odnowy.

1. CHARAKTERYSTYKA PROCESÓW STOCHASTYCZNYCH

Większość badanych zjawisk charakteryzuje się przypadkowością lub inaczej losowością, oznacza to, że każde doświadczenie może być powtarzane wiele razy w tych samych warunkach, a jego wyników nie można jednoznacznie przewidzieć.

Zdarzenia elementarne, stanowiące podstawę rachunku prawdopodobieństwa tworzą podzbiory zdarzeń losowych, które zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedno ze zdarzeń elementarnych wchodzących w skład tego zdarzenia losowego (Cieciura i Zacharski, 2007).

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa zakłada, że jeśli:

- przestrzeń zdarzeń elementarnych składa się ze skończonej liczby równoważnych zdarzeń ma określoną liczbę elementów:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_N\} \tag{1}$$

- zdarzenia losowe *A* składają się z *n* elementarnych zdarzeń:

$$A = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots \omega_{j_n}\}, \quad \omega_{j_i} \in \Omega, i = 1, n \tag{2}$$

to prawdopodobieństwo zdarzenia A określić można za pomocą wzoru:

$$P(A) = \frac{n}{N} \tag{3}$$

gdzie: *n* oznacza liczbę elementarnych zdarzeń należących do zdarzenia A, natomiast *N* liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych (Matalytski i Tikhonenko, 2011).

Badane zdarzenia rzeczywiste rozpatrują wszelkie możliwe wielkości najczęściej w zależności od czasu: $x = x(t)$.

Rodzinę $\xi(t) = \{\xi(t, \omega),\ t \in T, \omega \in \Omega\}$ zmiennych losowych, określonych na tej samej przestrzeni probabilistycznej (Ω, F, P), nazywa się funkcją stochastyczną, natomiast jeśli tej przestrzeni dane jest *T* określające przedział czasu oraz każdemu $\omega \in \Omega$ przyporządkowuje się odpowiadającą mu funkcję $\xi_t = \xi(t)$, $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, z przestrzeni n-wymiarowej ($n \geq 1$), tak, że dla każdego ustalonego parametru $t \in T$ funkcja $\xi(t, \omega)$, jest zmienną losową to funkcja nazywa się procesem stochastycznym.

Podstawowy podział procesów stochastycznych obejmuje:

- procesy z czasem dyskretnym lub ciągiem losowym, dla których zbiór T jest co najwyżej policzalny,

- procesy z czasem ciągłym, gdzie zbiór T pokrywa się z odcinkiem na prostej np. $T=[0;+\infty\}$ (Matalytski i Tikhonenko, 2011).

Najczęściej wykorzystywanymi w modelowaniu matematycznym procesami stochastycznymi jest proces Poissona, Gaussa, n-wymiarowy rozkład normalny oraz procesy Markowa. Aby móc ocenić dany proces należy dokonać charakterystyk jego własności, które pełnią funkcję momentów, czyli wartości średnich.

Do podstawowych charakterystyk średnich statystycznych procesów stochastycznych zaliczyć należy:

- wartość średnią $m_\xi(t)$ czyli wartość oczekiwaną przekroju procesu stochastycznego w chwili *t*:

$$m_\xi(t)=E\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x,t) \quad (4)$$

- wariancję przekroju, którą wyznacza się przez dystrybuantę jednowymiarową:

$$D_\xi(t) = E\left[\xi(t) - m_\xi(t)\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - m_\xi(t)\right]^2 dF(x,t) \quad (5)$$

- funkcję korelacyjną (autokorelacji), czyli wartość oczekiwaną iloczynu dwóch przekrojów procesu stochastycznego w chwilach czasu t_1, t_2:

$$R_\xi(t_1,t_2) = E[\xi(t_1)\xi(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 dF(x_1,t_1;x_2,t_2) \quad (6)$$

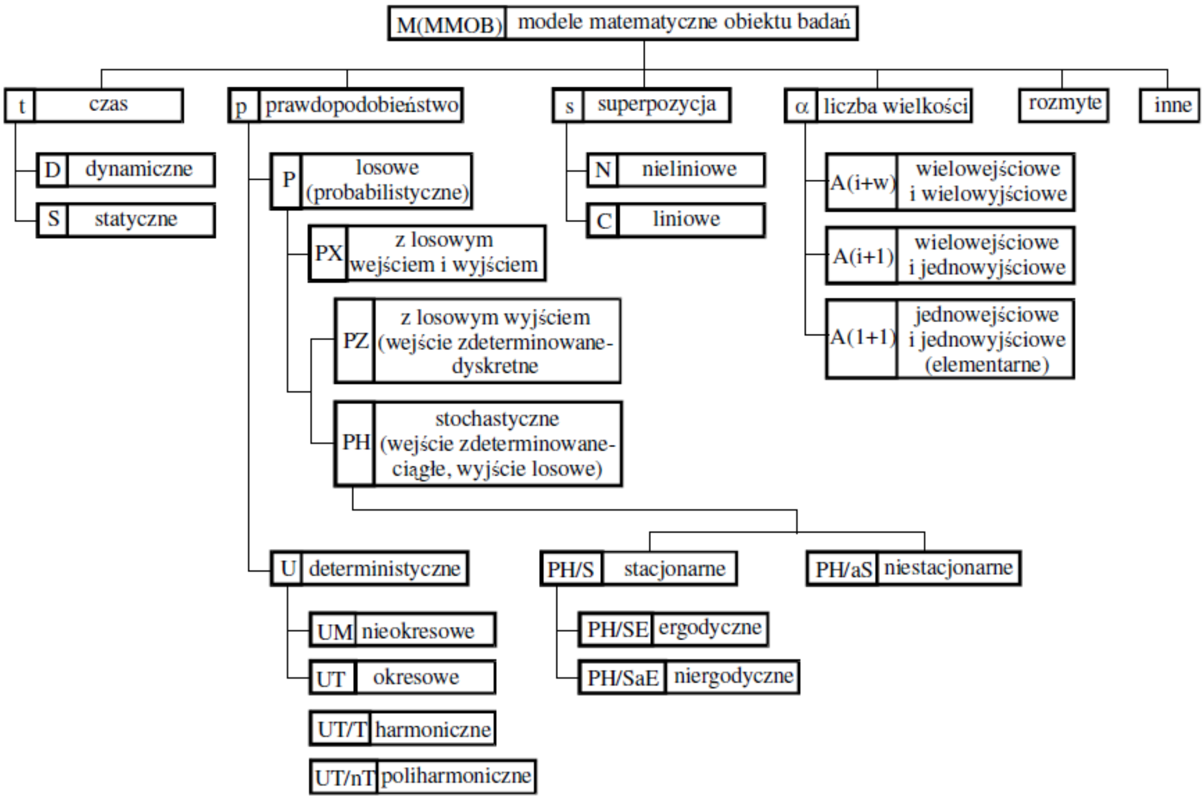
- funkcję kowariancji, czyli wartość oczekiwaną iloczynu przekrojów centrowych procesu stochastycznego w chwilach czasu t_1, t_2:

$$K_\xi(t_1,t_2) = cov\big(\xi(t_1)\xi(t_2)\big) = E\left[\Big(\xi(t_1) - m_\xi(t_1)\Big)(\xi(t_2) - m_\xi(t_2))\right] \quad (7)$$

unormowaną funkcję kowariancji lub współczynnikiem korelacji określa się wielkość:

$$r_\xi(t_1,t_2) = \frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sqrt{D_\xi(t_1)\, D_\xi(t_2)}} = \frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sqrt{K_\xi(t_1,t_1)\, K(t_2,t_2)}} \quad (8)$$

Metody teorii procesów stochastycznych są współcześnie jednym z najbardziej rozwiniętych narzędzi badawczych w opisie dynamiki układów złożonych. Poprzez zastosowanie odpowiedniego modelu matematycznego można dokonać transformacji posiadanej wiedzy dotyczącej funkcjonowania danego obszaru biznesowego na wybrany model oraz zbadać współzależności miar stanów procesu w czasie (Ziółkowski i Borucka, 2016) (rys. 1).

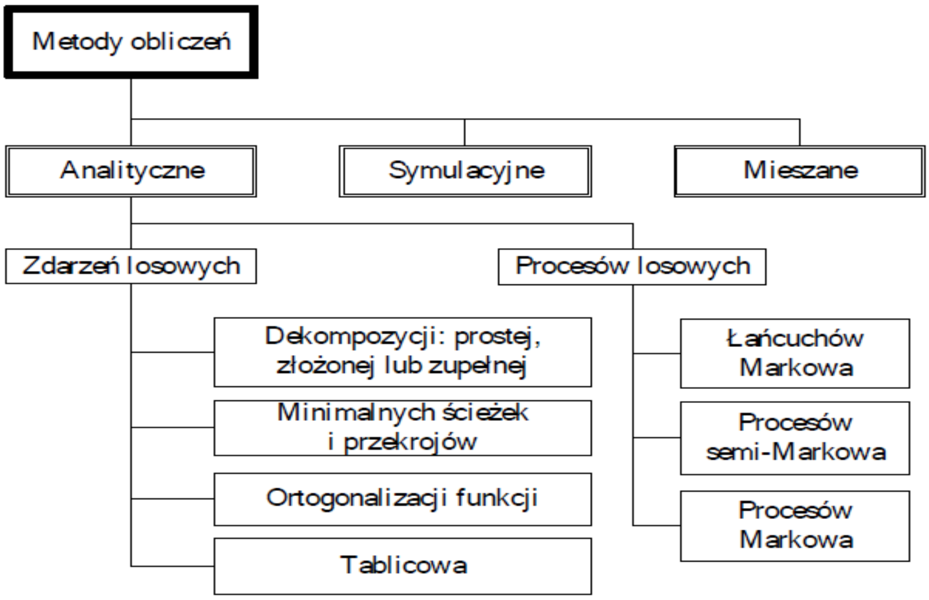


Rys. 1. Wybrane modele matematyczne obiektów badań
Źródło: (Niziński i Żółtowski, 2002).

Zastosowanie modelu matematycznego umożliwia opisanie wybranego procesu bardziej precyzyjnie i jednoznacznie. Możliwe staje się (z określonym prawdopodobieństwem) odtworzenie deterministycznych zasad funkcjonowania obiektu, a następnie określenie minimalnego zbioru informacji, który zagwarantuje jego zadowalający, naukowo-techniczny opis. W modelach stochastycznych (PH) wielkość zdeterminowana ciągła jest zwykle utożsamiana z czasem, lecz może nią być każda inna wielkość np. przebieg pojazdu w km, dlatego często modele te wykorzystuje się do analiz i badań z obszaru transportu oraz eksploatacji.

2. SPECYFIKA ZASTOSOWANIA PROCESÓW MARKOWA

W przypadku systemów o złożonej strukturze niezawodnościowej istnieje wiele metod obliczeń wskaźników niezawodności, różniących się pomiędzy sobą dokładnością i czasem obliczeń. Można je podzielić na trzy podstawowe grupy: analityczne, w których zdarzenia lub procesy losowe poddawane są analizie; symulacyjne, w których zdarzenia lub procesy losowe są symulowane oraz mieszane, w których wykorzystuje się oba wyżej wymienione podejścia. Szczegółowy podział metod obliczeń niezawodnościowych został przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2. Podział metod obliczeń niezawodnościowych
Źródło: (Paska i Marchel, 2016)

Wśród metod analitycznych opartych na analizie procesów losowych do najczęściej stosowanych należą metody łańcuchów i procesów Markowa oraz procesów semi-Markowa. Bazują one na przyjęciu za model niezawodnościowy badanego obiektu procesu losowego spełniającego własność Markowa.

W przypadku metody procesów Markowa rozkłady prawdopodobieństw czasów przebywania w stanach muszą być wykładnicze. Wyjątek stanowią obliczenia wartości asymptotycznych wskaźników niezawodności. W niektórych przypadkach istnieje również możliwość takiego przekształcenia przestrzeni stanów by niewykładnicze rozkłady prawdopodobieństw zastąpić ciągiem rozkładów wykładniczych. Metoda łańcuchów Markowa może być stosowana przy założeniu, że proces zmiany stanów jest pierwszego rzędu natomiast w procesach semi-Markowa rozkłady prawdopodobieństw mogą być dowolne, lecz większa uniwersalność metody wymaga zastosowania bardziej złożonego aparatu matematycznego (Paska i Marchel, 2016).

Proces stochastyczny $\{X_t\}_t$ określa się procesem Markowa, jeżeli dla danego momentu t_0 prawdopodobieństwo dowolnego położenia systemu w przyszłości $(t>t_0)$ zależy tylko od jego położenia w chwili $t=t_0$ i nie zależy od tego, w jaki sposób proces ten przebiegał w przeszłości. Mówi się, że jest to proces bez pamięci (Filipowicz, 1996).

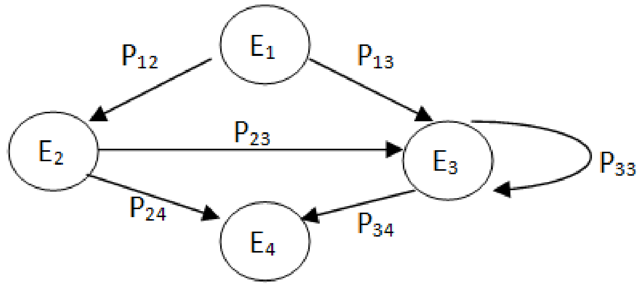
Procesy markowa dzieli się na klasy w zależności od tego, w jaki sposób, oraz w jakim zakresie system może zmieniać swoje położenie co warunkowane jest zbiorem stanów danego procesu. Zbiór S wartości, przyjmowanych przez proces i określonych jako zbiór stanów procesu, sklasyfikować można jak w sposób przedstawiony w tabeli 1.

Tabela 1. Klasyfikacja procesów losowych

Zbiór T	**Zbiór stanów S**	
	Co najwyżej przeliczalny (dyskretny)	**Przedział (ciągły)**
Co najwyżej przeliczalny (dyskretny)	Łańcuch losowy	Ciąg (szereg) losowy
Przedział (ciągły)	Punktowy proces losowy (o dyskretnej przestrzeni stanów)	Proces losowy z czasem ciągłym

Źródło: (Paska i Marchel, 2016)

Proces markowa jest procesem z dyskretnymi położeniami (stanami), jeżeli dopuszczalne stany systemu E_1, E_2, E_3... E_n można przeliczyć, a sam proces polega na tym, że co pewien przypadkowy przedział czasu system w sposób skokowy przechodzi z jednego położenia w inne co obrazuje rysunek 3.



Rys. 3. Graf stanów procesu z dyskretnymi położeniami
Źródło: Opracowanie własne

Procesy z ciągłymi położeniami charakteryzują się stopniowymi (ciągłymi) przejściami z danego położenia w inne. Przykładem jest proces zmiany napięcia w sieci elektrycznej. Jeśli w procesie przejścia systemu z jednego z jednego położenia w inne, możliwe są tylko w ściśle ustalonym czasie t_1, t_2, t_3... t_n i w przedziałach czasu pomiędzy tymi momentami system zachowuje swoje poprzednie położenie to nazywamy go procesem z dyskretnym czasem. Jeśli przejście systemu z jednego położenia w inne jest możliwe w każdym z góry nieznanym momencie, to proces nazywamy procesem z ciągłym czasem.

Proces stochastyczny $\xi(t)$ nazywa się markowa, jeśli jego warunkowa gęstość prawdopodobieństwa:

$$P\left(x_{n+1}, t_{n+1} \middle| x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n\right) = \frac{P(x_1,t_1;x_2,t_2;\dots;x_{n+1},t_{n+1})}{P(x_1,t_1;x_2,t_2;\dots;x_n,t_n)} \tag{9}$$

nie zależy od wartości procesu w chwilach t_1, t_2, t_3... t_{n-1}, a określony jest tylko wartością $\xi(t) = x_n$. Warunkową gęstość prawdopodobieństwa określa się jako prawdopodobieństwo przejścia systemu ze stanu x_n, w którym znajdował się w chwili t_n, do stanu x_{n+1} w chwili $t_{n+1} > t_n$ i oznacza się jako:

$$P\left(x_{n+1}, t_{n+1} \middle| x_n, t_n\right) = P(x_{n+1}, t_{n+1}; x_n, t_n) \tag{10}$$

Proces markowa, dla którego zbiór X=$\{i_1, i_{2\dots} i_n\}$ jest zbiorem przeliczalnym lub skończonym, nazywa się łańcuchem Markowa, który może być:

- łańcuchem Markowa z czasem dyskretnym,
- łańcuchem Markowa z czasem ciągłym dla którego zbiór *T* jest przedziałem skończonym lub nieskończonym (Matalytski i Tikhonenko, 2011).

Łańcuch Markowa z czasem dyskretnym i ze skończonym zbiorem stanów $X=\{1,2, \dots N\}$, gdzie prawdopodobieństwa przejścia łańcucha ze stanu *i* do stanu *j* w ciągu *n* kroków nie zależą od m : $p_{ij}{}^{(n)} = P(\xi_{m+n} = j \,|\, \xi_m = i), = n \geq 1, m \geq 1, i, j \in X$ nazywa się jednorodnymi łańcuchami Markowa. Macierz postaci:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ . & . & . & . \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \quad \text{gdzie } \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1, \;\; i = 1, N \tag{11}$$

nazywa się macierzą prawdopodobieństw przejścia łańcucha Markowa, która spełnia równanie Chapmana-Kołmogorowa:

$$p_{ij}{}^{(n+l)} = \textstyle\sum_k p_{ik}{}^{(n)} p_{kj}{}^{(l)} \tag{12}$$

Procesy Markowa rozumiane jako ciąg zdarzeń losowych, których prawdopodobieństwo istnienia zależy jedynie od wyniku zdarzenia poprzedniego stanowią jedną z klas procesów stochastycznych. W ujęciu matematycznym są podstawą do prowadzenia obliczeń na systemach o złożonej strukturze, dlatego znalazły szerokie zastosowanie w modelowaniu niezawodności obiektów i systemów technicznych.

3. MODELOWANIE SYSTEMU EKSPLOATACJI POJAZDÓW MECHANICZNYCH PRZY ZASTOSOWANIU PROCESU MARKOWA

Eksploatacja określana jest najpowszechniej jako zespół celowych organizacyjno-technicznych i ekonomicznych działań ludzi z obiektem technicznym oraz wzajemne relacje, występujące pomiędzy nimi od chwili przejęcia obiektu do wykorzystania zgodnie z jego przeznaczeniem, aż do jego likwidacji (PN-82/N-04001).

System eksploatacji pojazdów mechanicznych może być bardzo zróżnicowany, jednak w przedsiębiorstwach transportowych zazwyczaj składa się z podsystemu użytkowania, obsługiwania, zasilania oraz zarządzania. Racjonalność działania takich systemów decyduje o efektywności zastosowania obiektów technicznych i możliwościach realizacji przez nie wytyczonych celów (Brzeziński i Zdunek, 2016).

W teorii eksploatacji obiektów i systemów technicznych, jak i w praktycznym jej zastosowaniu, wiele uwagi poświęca się problemowi modelowania. Użycie języka matematyki do opisania zachowania systemu jest najbardziej efektywne ze względu na jego uniwersalizm i możliwość dopasowania zastosowanego zbioru symboli i relacji matematycznych oraz ścisłych zasad operowania nimi do opisu wielu zjawisk rzeczywistych.

Najczęściej celem badań i analiz jest niezawodność systemów eksploatacji. Zastosowanie procesów Markowa często odnosi się do rozwiązywania problemów z obszaru teorii odnowy, która zajmuje się badaniem procesów zużycia i reprodukcji obiektów technicznych oraz usprawnianiem zasad gospodarowania tymi obiektami. Przedmiotem rozważań w teorii odnowy są zbiorowości obiektów działających w określonych warunkach eksploatacyjnych. Takimi zbiorami jest najczęściej flota transportowa danego przedsiębiorstwa.

W teorii odnowy, która zajmuje się ustaleniem zasad optymalnej eksploatacji obiektów technicznych na szczególną uwagę zasługuje model jednorodnej odnowy prostej, tzn. takiej przy których liczność zbioru obiektów technicznych jest stała we wszystkich chwilach czasu, zakłada się w tym przypadku, że czas eksploatacji obiektów w chwili $t = 0$, jak i obiektów włączanych w późniejszych chwilach czasu jest zmienną losową o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa. Obiekty techniczne w tym modelu są jednorodne, czyli jednakowe lub nieznacznie różniące się i eksploatowane w tych samych warunkach.

Model pozwala na prognozowanie liczby obiektów jaka będzie potrzebna w przyszłości do odnowy ich zbioru, aby utrzymać stałą liczbę obiektów w eksploatacji (Koźniewska i Włodarczyk, 1987; Żółtowski i Niziński, 2002):

- ogólny model odnowy jednorodnej czyli taki, w którym odnowa zbioru obiektów technicznych może być dokonywana w sposób rozszerzony, zawężony i mieszany,
- model jednorodnej odnowy z obiektami częściowo zużytymi lecz jednorodnymi z obiektami wycofanymi, inaczej obiektami których czas eksploatacji nie jest zerowy,
- model niejednorodny odnowy prostej dotyczy obiektów technicznych, które różnią się między sobą niektórymi parametrami techniczno-eksploatacyjnymi chociaż wszystkie mają jednakowe przeznaczenie,
- ogólny model odnowy niejednorodnej dotyczy obiektów niejednorodnych, technicznie realizowanej sposobem rozszerzonym, zawężonym lub mieszanym.

W przedsiębiorstwach transportowych pojazdy mechaniczne stanowią zbiór elementów systemu, który podlega stałej weryfikacji i kontroli. Aby efekt ekonomiczny został osiągnięty, system eksploatacji pojazdów mechanicznych w szczególności proces ich użytkowania i odnowy powinien być odpowiednio zaplanowany i realizowanym (Brzeziński i Justyna, 2014).

Rozpatrując problem modelowania systemu eksploatacji na wybranym przykładzie określone zostały następujące założenia:

Przedsiębiorstwo transportowe dysponuje flotą pojazdów ciężarowych o podobnych parametrach technicznych w ilości 40 sztuk. Każdy pojazd w określonym czasie może znajdować się w stanie zdatności technicznej, czyli zdolności do wytworzenia i utrzymania niezbędnego stanu funkcjonalnego lub niezdatności i tym samym kwalifikuje się do odnowy. Celem modelowania systemu eksploatacji pojazdów mechanicznych przedsiębiorstwa jest określenie ilości pojazdów przeznaczonych do odnowy w kolejnych okresach czasu.

Założenia do obliczeń modelu jednorodnej odnowy prostej:

1. Przyjęte parametry odnowy:

$$r_k = P(r>k) \;;\quad a_k = r_{k-1} - r_k \;;\quad r_k = \sum_{j=k+1}^{T} a_j \tag{13}$$

Gdzie:
r – czas eksploatacji k=0,1,…,T
a_k – prawdopodobieństwo wycofania obiektu w k-tym okresie eksploatacji
r_k – prawdopodobieństwo przetrwania więcej niż k okresów, k=0,1,…,T-1

2. Model opisywany jest za pomocą macierzy prawdopodobieństw przejścia $P(n) = [p_{ij}(n)]$, która określa prawdopodobieństwo przejścia pojazdu ze stanu fazowego i w momencie $n-1$ do stanu j w momencie n:

$$[p_{ij}(n)] = P\left(W_n = j \,\middle|\, W_{n-1} = i\right) \tag{14}$$

Gdzie:
W – stan fazowy obiektu wyrażony w jednostkach czasu

3. Zgodnie z definicją prawdopodobieństwa warunkowego:

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{i+1}}{r_i} & dla \quad i = 0,1 \ldots T-1 \,;\, j = 0 \\ \frac{r_{i+1}}{r_i} & dla \quad i = 0,1 \ldots T-2 \,;\, j = i+1 \\ 0 & dla \;\; pozostałych \; i,j \in S \end{cases} \qquad P = \begin{bmatrix} a_1 & r_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{a_2}{r_1} & 0 & \frac{r_2}{r_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{a_3}{r_2} & 0 & 0 & \frac{r_3}{r_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a_{T-1}}{a_{T-2}} & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{r_{T-1}}{r_{T-2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

4. Wektor rozkładu zbiorowości według wieku: wektor D, którego składowymi są liczby urządzeń o określonym wieku (stanie fazowym). Znając macierz prawdopodobieństw przejścia oraz rozkład wg wieku zbiorowości w momencie czasu n-1 można wyznaczyć oczekiwany rozkład tej zbiorowości po upływie jednego okresu, czyli w momencie n:

$$D_n = D_{n-1} \cdot P \tag{16}$$

Gdzie:
D_n – wektor wierszowy rozkładu zbiorowości według wieku

5. Równanie rekurencyjne:

$$D_n = D_0 \cdot P^n \tag{17}$$

służy do prognozowania stanu zbiorowości w okresach dowolnie odległych od momentu początkowego, gdzie wektor D_n oznacza liczbę elementów w wieku zerowym, a więc odnowionych u_n czyli liczbę odnowień w okresie *(n-1,n)*.

Rozpoczynając eksploatację 40 pojazdów mechanicznych, przyjmuje się, że każdy z nich wykonuje 1 jednostkę przebiegu. Maksymalny okres eksploatacji określono na 4 najbliższe lata. Na podstawie analiz oraz danych z lat poprzednich określone zostało prawdopodobieństwo uszkodzenia w kolejnych okresach eksploatacji (tabela 2):

Tabela 2. Dane prawdopodobieństw uszkodzeń w kolejnych okresach

t_i	1	2	3	4
a_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Źródło: opracowanie własne

Gdzie:

t_i – kolejny rok eksploatacji pojazdów mechanicznych
a_i – prawdopodobieństwo uszkodzenia w kolejnych latach

Na podstawie danych z tabeli 2 obliczone zostały prawdopodobieństwa przetrwania obiektów r_k:

Tabela 3. Dane prawdopodobieństw przetrwania w kolejnych okresach

t_i	0	1	2	3	4
a_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4
r_k	1	0,9	0,7	0,4	0

Źródło: opracowanie własne

Dane zostały naniesione na macierz prawdopodobieństw przejścia warunkowego oraz określony został teoretyczny wektor rozkładu *D*:

$$D = [10,10,10,10] \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{9}{10} & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{7}{9} & 0 \\ \frac{3}{7} & 0 & 0 & \frac{4}{7} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Zgodnie z przedstawioną metodologią obliczeń przejść w macierzy (15) wyznaczona została stacjonarna liczba pojazdów do odnowienia w kolejnych 4 latach eksploatacji:

D_1 = 17,5 - w 1 roku eksploatacji

D_2 = 9 - w 2 roku eksploatacji

D_3 = 7,8 - w 3 roku eksploatacji

D_4 = 5,7 - w 4 roku eksploatacji

Modelowanie systemu eksploatacji przeprowadzone na bazie procesów Markowa umożliwiło określenie ilości pojazdów mechanicznych skierowanych do odnowy w kolejnych latach eksploatacji. Spośród 40 pojazdów, w pierwszym roku do odnowy skierowanych zostanie 17 pojazdów, w drugim roku eksploatacji 9, w trzecim 8, a w czwartym 6. Jeśli rozpatrywaną zbiorowość można określić jako jednorodną, wykorzystanie procesów stochastycznych do modelowania jej zachowań jest trafne i poprawne również w ujęciu praktycznym.

PODSUMOWANIE

Uszkodzenia pojazdów mechanicznych podczas ich eksploatacji to zazwyczaj zjawiska o charakterze losowym, dlatego istotną rolę odgrywa w tym przypadku modelowanie zachowań całego systemu eksploatowanych pojazdów w określonym czasie. Modelami dla zdarzeń losowych obserwowanych w czasie są procesy stochastyczne. Przyjmując, że liczba występujących uszkodzeń w jednym okresie nie zależy od liczby w okresach poprzednich, procesy uszkodzeń obiektów można rozpatrywać jako procesy Markowa, które z określonym dyskretnym parametrem czasowym stanowią przedmiot teorii odnowy.

W systemie eksploatacji pojazdów mechanicznych teoria odnowy ma zastosowanie w odnowie parków maszynowych, masowej obsłudze i gospodarce częściami zamiennymi. Jej prawidłowe funkcjonowanie przyczynia się do efektywnego wykorzystania potencjału eksploatacyjnego oraz zwiększania wydajności procesów gospodarczych (Brzeziński i Zdunek, 2016).

Procesy Markowa, jako metody obliczeń zdarzeń losowych znajdują szerokie zastosowanie w inżynierii, genetyce czy biochemii. Podczas analizy zasadniczą rolę odgrywa funkcja prawdopodobieństwem przejścia, która stanowi podstawę modelowania stanów określonej zbiorowości w czasie dyskretnym. Zastosowanie procesów markowa może stanowić podstawę efektywnego planowania i zarządzania całym systemem eksploatacji pojazdów mechanicznych w przedsiębiorstwach transportowych.

LITERATURA

1. Brzeziński, M. Chylak, E. (1996). *Eksploatacja w logistyce wojskowej*. Warszawa: Bellona.
2. Brzeziński, M. Zdunek, P. (2016). Wpływ użytkowania środków transportowych na skuteczność ich działania w procesie eksploatacji. *Systemy Logistyczna Wojsk, 44*, strony 6-17.
3. Brzeziński, M. Justyna, M. (2014). Koncepcja modelu procesu wyboru dostawców usług logistycznych. *Systemy Logistyczna Wojsk*, *37*, strony 25-34.
4. Brzeziński, M. Zdunek, P. (2016). Analiza modeli systemu eksploatacji obiektów technicznych. *Gospodarka Materiałowa i Logistyka*, 5, strony 830-845.
5. Cieciura, M. Zacharski, J. (2007). *Metody probabilistyczne w ujęciu praktycznym*. Warszawa: Marek Cieciura&Janusz Zacharski.
6. Filipowicz, B. (1996). *Modele stochastyczne w badaniach operacyjnych.* Warszawa: Wydawnictwo Naukowo-Tchninnczne.
7. Koźniewska, I. Włodarczyk, M. (1987). *Modele odnowy, niezawodności i masowej obsługi*. Warszawa: PWN.
8. Matalytski, M. Tikhonenko,O. (2011). *Procesy stochastyczne.* Warszawa: Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT.
9. Paska, J. Marchel, M. *Wykorzystanie metod procesów Makowa i semi-Markowa w analizie niezawodności elementów i systemów*. Warszawa: Politechnika Warszawska, http://marie-www.ee.pw.edu.pl/~marchelp/files/BEiNZ-cw4.pdf (24.03.2017).
10. PN-82/N-04001: Eksploatacja obiektów technicznych. Terminologia ogólna.
11. Ziółkowski, J. Borucka, A. (2016). Zastosowanie modelu Markowa w sferze dystrybucji. *Przedsiębiorczość i Zarządzanie, tom 17,z.3, c.3*, strony 115-127.
12. Żółtowski, B. Niziński, S. (2002). *Modelowanie procesów eksploatacji maszyn*. Białe Błota Wydawnictwo MARKAR - BZ.