

**MODELOWANIE I PROGNOZOWANIE EKONOMETRYCZNE W LOGISTYCE  
PRZEDSIĘBIORSTWA  
MODELING AND ECONOMETRIC PREDICTION IN LOGISTICS COMPANY**

**Agnieszka DUDA**  
a.duda@aon.edu.pl

Akademia Obrony Narodowej  
Wydział Zarządzania i Dowodzenia  
Instytut Logistyki

*Streszczenie: Artykuł poświęcony jest modelowaniu i prognozowaniu ekonometrycznemu w logistyce przedsiębiorstwa na bazie szczegółowego algorytmu wykorzystania klasycznej metody najmniejszych kwadratów oraz podjęcie próby usystematyzowania wiedzy w tym obszarze badań naukowych.*

*Abstract: The article is devoted econometric modeling and prediction in logistics company based on a specific algorithm using the classical method of least squares and attempts to systematize the knowledge in this area of research.*

*Słowa kluczowe: prognoza, prognozowanie, modelowanie, modelowanie ekonometryczne*

*Key words: prediction, predicting, modeling, econometric modeling*

## **WSTĘP**

Zaspokajanie potrzeb klientów oraz generowanie maksymalnego zysku jest istotą funkcjonowania każdej firmy (Grzelak M., Ziółkowski J., 2014, s. 379). Przy realizacji tak sformułowanego celu generalnego, pomocnym może być modelowanie i prognozowanie ekonometryczne pozwalające określić, z góry ustalonym prawdopodobieństwem, przyszłe potrzeby klientów. Współczesna logistyka nie może obejść się bez prognozowania. Każde przedsiębiorstwo powinno posiadać zespół specjalistów zajmujący się szeroko rozumianym prognozowaniem.

Termin prognozowanie, a właściwie „prognoza” wywodzi się od greckiego *prognosis* i oznacza przewidywanie określonych danych. W greckim źródłosłowie pojęcia „prognoza” można wyróżnić dwa człony: przedrostek *pro* oraz *gnosis*. Przedrostek wskazuje na wstępną, przygotowawczą fazę, a określenie *gnosis* oznacza wiedzę o czymś, co jeszcze nie nastąpiło” (Sobczyk, 2008, s. 9). Dlatego pojęcie prognozy trzeba odróżnić od wizji, wróżby, przepowiedni, czy przypuszczenia. Podstawą prognozowania musi być konkretna wiedza i znajomość badanego zjawiska.

Z powyższego wynika, że **prognoza** jest wynikiem określonej, zweryfikowanej naukowo, reguły przewidywania o przyszłym zdarzeniu. **Reguły przewidywania** odwołują się do pewnych określonych informacji o zdarzeniach z przeszłości oraz wiedzy o prognozowanym zjawisku. Informacje o zdarzeniach przeszłych są traktowane jako dane wyjściowe do obliczenia prognoz. (Krawczyk, 2001, s. 244). Prognozowanie popytu

traktowane jest jako jeden z ważniejszych elementów planowania strategicznego pozwalający prawidłowo ustalić wielkość sprzedaży. Prognozowanie jest również istotnym źródłem informacji podczas optymalizacji procesów w przedsiębiorstwie, co pozwala zminimalizować generowane koszty przy jednoczesnym zwiększeniu efektywności oraz wspiera kierownictwo firmy w podejmowaniu racjonalnych decyzji dotyczących działalności strategicznej przedsiębiorstwa (Ziółkowski J., Misiuda D., 2015, s. 214).

Definicji prognozy jest wiele, wynikają one z różnorodnych czynników, sytuacji prognostycznych, metod badań czy ich celów. Miary prognozujące (wskaźniki przyszłego sukcesu, wskaźniki kierunkowe, wskaźniki przyszłości, nośniki efektywności) są miarami wykorzystywanymi również w prognozowaniu na przykład świadczenia usług logistycznych na potrzeby rynku, w ramach zrównoważonej karty wyników, która jest instrumentem wspomagającym realizację strategii firm (Kurasiński Z., Bartosiewicz S., 2012, s. 177÷118). Na potrzeby tego artykułu przyjmuje się proste uogólnienie, że prognoza to sąd odnoszący się do przyszłości.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie propozycji modelowania i prognozowania ekonometrycznego do zastosowania w przedsiębiorstwach logistycznych. Wyjaśnienie istoty modelowania i prognozowania w oparciu o zaproponowany algorytm oraz podjęcie próby usystematyzowania wiedzy w tym obszarze badań naukowych. Do realizacji powyższego celu wykorzystano następujące metody badawcze: krytyczna analiza literatury przedmiotu badań, w szczególności w obszarze modelowania i prognozowania ekonometrycznego, analiza procesu prognozowania, synteza oraz wnioskowanie.

## **1. PROGNOZOWANIE W PRZEDSIĘBIORSTWIE**

Prognozowanie w przedsiębiorstwie wpisuje się w system wspierania kierownictwa firmy, ponieważ nieustannie musi ona podejmować wiele trudnych decyzji dotyczących działalności przedsiębiorstwa. Każda działalność rynkowa wiąże się z ryzykiem, dlatego podczas zarządzania firmą zawsze powstaje wiele trudności. Niepewność związana jest z podejmowaniem decyzji, których skutki będziemy obserwować w przyszłości. Trafne decyzje muszą opierać się na solidnych informacjach o obecnym stanie przedsiębiorstwa oraz jego otoczeniu. Przewidywanie wydarzeń pozwala zoptymalizować i zaplanować działalność firmy (Maciąg, Pietroń, Kukła, 2013, s. 15).

Konsekwencjami błędnego prognozowania mogą być duże straty w firmach. Niedoszacowanie popytu może skutkować utratą zaufania klientów, natomiast przeszacowanie wiąże się z niepotrzebnym zwiększeniem zapasów magazynowych, co powoduje zwiększenie kosztów magazynowania. Najdotkliwsze może się to okazać dla

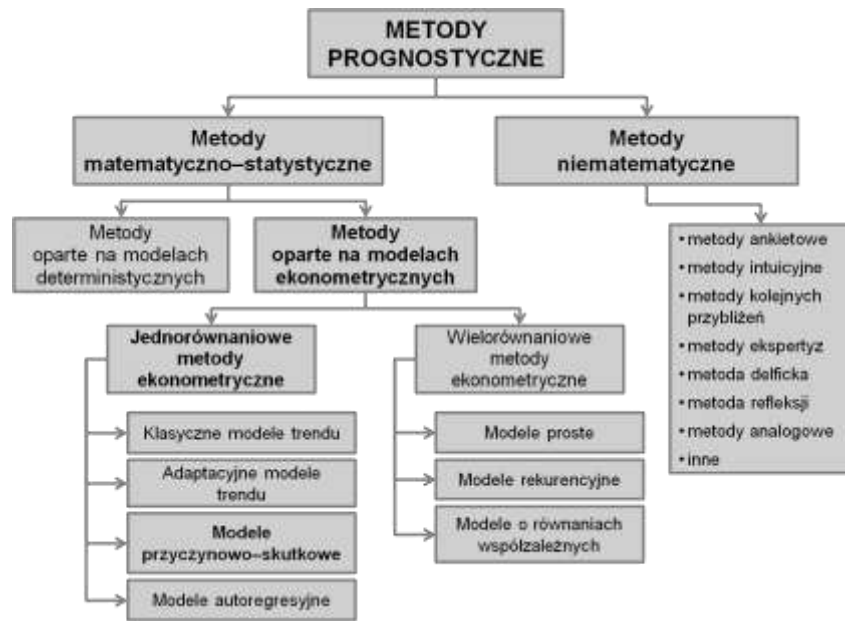
produktów o krótkim terminie przydatności do spożycia. Prognozowanie pozwala również optymalizować zatrudnienie oraz dostawy (Maciąg, Pietroń, Kukła, 2013, s. 16).

W przedsiębiorstwie podstawowymi obszarami, w których można wykorzystywać prognozowanie, są: popyt na produkty, sprzedaż produktów – produkcja sprzedana, zmiany stanów magazynowych, zapotrzebowanie na surowce. W tych obszarach zjawiska lub procesy kształtowane są przez różne mechanizmy zarządzania, które mają istotny wpływ na wyniki. Popyt na produkty przedsiębiorstw działających w warunkach konkurencji oraz podaź generowana przed to przedsiębiorstwo jest wynikiem działania swobodnego kształtowania mechanizmów rynkowych (Janicki A., Wojciechowski A., 2007, s. 140). Na dane będące podstawą prognozowania, można spojrzeć w dwojaki sposób. Po pierwsze, jako postawę aktywną, polegającą na uwzględnianiu informacji o przyczynach tych wyników w danym okresie. Bowiem zwiększona sprzedaż może być wynikiem sezonowego popytu, np. zwiększona sprzedaż karpia na Boże Narodzenie. Natomiast wysoki stan zapasów może być wynikiem błędnego zamówienia. Uwzględnienie takich informacji powinno skorygować wnioski o zdarzeniach przyszłych. Po drugie, przyjmując postawę w oderwaniu od uzasadnień merytorycznych, zakładając niejako, że zdarzenia te wystąpią również w przyszłości. Postawa pasywna pozwala konstruować uniwersalne modele prognozowania odwołujące się do metod matematycznych. Jeżeli jednak uzyskanie prognozy uzależnimy od „suchych” danych, które są po prostu ciągami liczb, to należy je bardzo starannie zweryfikować, czy istnieje model adekwatny do analizowanego zjawiska. Z formalnego punktu widzenia z góry można stwierdzić, że w praktyce dla żadnego zjawiska nie można wskazać idealnego modelu pozwalającego wyznaczyć prognozę z gwarancją ich spełnienia. Dlatego w prognozowaniu bardzo ważna jest analiza błędów prognozy, która musi być integralną częścią wnioskowania (Krawczyk, 2001, s. 245).

Metody prognozowania można podzielić na ilościowe oraz jakościowe. Metody ilościowe oparte są na modelach matematycznych. Należą do nich przede wszystkim: prognozowanie w oparciu o modele ekonometryczne, analizy szeregów czasowych, sieci neuronowe, drzewa decyzyjne, analiza dyskryminacyjna. Natomiast do metod jakościowych zalicza się metodę ankietową, delficką, testy rynkowe, metody analogowe oraz wiele innych (Maciąg, Pietroń, Kukła, 2013, s. 25). Klasyfikację metod prognozowania przedstawia rys. 1.

Metody prognozowania są specjalnie określonym postępowaniem, wykorzystywanym do rozwiązywania zadań prognostycznych. Określonymu sposobowi przetworzenia danych o przeszłości mogą towarzyszyć różne reguły wyznaczania prognozy. Zatem na metodę

prognozowania składają się dwa elementy: model i reguła prognozowania (Sobczyk, 2008, s. 21).



Rys. 1. Klasyfikacja metod prognozowania

Źródło: opracowanie własne na podstawie Zielaś, Pawełek, Wanat, 2003, s. 16.

Klasyfikacji prognoz jest wiele, wszystko zależy od przyjętego kryterium (rys. 2). Ukazany podział nie wyczerpuje wszystkich możliwych kryteriów klasyfikacji prognoz. Przykładowo prognoza krótkookresowa może obejmować okres jednego miesiąca (prognoza sprzedaży) lub nawet kilku lat (w demografii).

<b>Typ zmiennej prognozowanej</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ilościowe (punktowe, przedziałowe)</li> <li>• jakościowe</li> </ul>
<b>Okres prognozy</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• krótkoterminowe</li> <li>• średnioterminowe</li> <li>• długoterminowe</li> </ul>
<b>Cel prognozy</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• poznawcze</li> <li>• ostrzegawcze</li> <li>• normatywne</li> </ul>
<b>Rodzaj prognozowanego zjawiska</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• gospodarcze</li> <li>• społeczne</li> </ul>

Rys. 2. Rodzaje prognoz w zależności od przyjętego kryterium

Źródło: opracowanie własne na podstawie Maciąg, Pietroń, Kukla, 2013, s. 25.

Dlatego przyjmuje się, że prognoza krótkookresowa obejmuje tylko okres, w którym zachodzą jedynie zmiany ilościowe. Gdy w okresie prognozowania pojawiają się mało znaczące zmiany jakościowe, należy mówić o prognozach średnioterminowych. Natomiast kiedy zachodzą znaczne zmiany jakościowe, należy mówić o prognozach długoterminowych (Maciąg, Pietroń, Kukla, 2013, s. 25).

Dane statystyczne odgrywają istotną rolę w procesie prognozowania. Stanowią one podstawę wyboru klasy modelu prognostycznego wyjaśniającego relacje pomiędzy różnymi aspektami analizowanego zjawiska, oszacowania jego parametrów strukturalnych i struktury stochastycznej, weryfikacji prognoz itp. W związku z tym wymaga się by dane liczbowe były odpowiedniej jakości. Dość często wymienia się takie właściwości określające jakość danych jak: jednorodność, porównywalność, kompletność, jednoznaczność, aktualność dla przyszłości, rzetelność, wiarygodność (Sobczyk, 2008, s. 29).

### **1.1. Funkcje prognozowania**

Głównym celem prognozowania jest wspomaganie procesów decyzyjnych. W związku z tym wyróżnia się podstawowe i pomocnicze funkcje prognoz (Sobczyk, 2008, s. 15). Do podstawowych funkcji prognoz można zaliczyć funkcje:

- funkcję preparacyjną,
- funkcję aktywizującą,
- funkcję informacyjną.

**Funkcja preparacyjna** wynika z tego, że jest działaniem, które przygotowuje inne działania podejmowane przez decydenta (pojedynczego człowieka, grupę osób, podmiot gospodarczy lub instytucję). Decydent opierając się na sformułowanej przez prognostę prognozie jest w stanie postępować racjonalnie wtedy, kiedy będzie miał do niej zaufanie. Za jakość prognozy odpowiada prognosta, natomiast to decydent musi mieć umiejętność jej oceny, gdyż skutki jego decyzji ujawią się w przyszłości. W roli prognosty może wystąpić sam decydent, a nie specjalne instytucje,

**Funkcja aktywizująca** polega na pobudzaniu do podejmowania działań sprzyjających realizacji prognozy zapowiadającej korzystne zdarzenia oraz przeciwstawiającej się jej spełnieniu. Jeśli przewidywane zdarzenia są oceniane negatywnie (np. prognoza spadku sprzedaży w firmie, czy wzrostu udziału produktów nie odpowiadających normą jakościowym),

**Funkcja informacyjna** związana jest z oswojeniem społeczeństwa z nadchodzącymi zmianami i zmniejszaniem lęku przed przyszłością. Ogłoszenie niektórych prognoz może wywołać opanowane reakcje na zmiany, a nawet pełną ich akceptację.

Funkcje prognoz preparacyjna, aktywizująca i informacyjna wspomagają skutecznie procesy decyzyjne w logistyce, jeżeli oparte są na dużym zaufaniu i akceptacji jej przewidywanych wyników oraz służą pobudzaniu decydentów do podejmowania sprzyjających działań w kierunku ich realizacji.

Oprócz powyżej wymienionych trzech podstawowych, wyróżnia się również funkcje pomocnicze prognoz (Witkowski, Klimanek, 2006, s. 14.):

- **funkcja argumentacyjna** – prognoza dostarcza decydującym argumentów ułatwiających podejmowanie takich, a nie innych decyzji,
- **funkcja doradcza** – prognoza przygotowuje odpowiednie informacje odnoszące się do zjawisk będących przedmiotem procesu decyzyjnego,
- **funkcja mediacyjna** – prognoza jest pomocna przy określaniu cen transakcyjnych (np. w procesie kupna – sprzedaży działki budowlanej).

Prognozy mają wiele funkcji dzięki czemu jednocześnie są uniwersalne i mogą być zastosowane w działalności wielu przedsiębiorstw i nie tylko. Są zatem ze względów praktycznych podzielone na etapy, fazy i reguły prognozowania.

### **1.2. Fazy, etapy i reguły prognozowania**

W procesie prognozowania wyróżnia się dwie zasadnicze fazy (Sobczyk, 2008, s. 20÷21):

- diagnozowania przeszłości,
- określania przyszłości.

**Diagnozowanie przeszłości** ma na celu poznanie natury zjawiska prognozowanego, mechanizmów jego rozwoju oraz ocenę czynników kształtujących go. W fazie tej gromadzone są dane (informacje) dotyczące przeszłości, które są poddawane przetworzeniu. Odbywa się to przez budowę formalnego modelu (np. modelu ekonometrycznego lub modelu tendencji rozwojowej) bądź myślowego (tworzonego w umyśle eksperta).

**Określenie przyszłości** – następuje przejście od danych przetworzonych do prognozy, sposób takiego przejścia nazywamy regułą (zasadą) prognozowania.

W większości procesów prognostycznych można wyróżnić także kilka wspólnych etapów (Maciąg, Pietroń, Kukła, 2013, s. 25÷27):

- etap określenia problemu prognostycznego,
- etap wyboru zmiennych,
- etap uzyskania i wstępnej analizy danych,
- etap wyboru metody,
- etap wyznaczenia prognozy oraz ocena jej dopuszczalności,
- etap wykorzystania prognozy oraz jej weryfikacji.

**Etap określenia problemu prognostycznego** wymaga jasnego sprecyzowania celu badań. Należy określić zjawisko, którego dotyczy prognoza. Może to być wielkość sprzedaży, produkcji lub zatrudnienia, inflacja itp.,

**Etap wyboru zmiennych** dąży do określenia zmiennej (zmiennych) prognozowanej oraz zmienne, które mają wpływ na zachowanie się prognozowanego zjawiska. Problem wyboru zmiennych wpływających na prognozowane zjawisko często jest dość skomplikowany. Z jednej strony, zbyt dużo zmiennych nadmiernie komplikuje model. Z drugiej strony, zbyt mała ich liczba prowadzi do dużej rozbieżności modelu z rzeczywistością. Kiedy wybierzemy już zmienne należy określić powiązania między nimi,

**Etap uzyskania i wstępnej analizy danych** – po określeniu zmiennych należy zgromadzić niezbędne dane oraz określić, jaki zakres danych jest interesujący. Uwzględnienie wszystkich posiadanych danych może być błędne lub nie odnosić się do celu naszych badań. Po zgromadzeniu danych trzeba je skrupulatnie przeanalizować oraz uporządkować. Należy zwrócić szczególną uwagę na to czy nie brakuje danych i czy nie ma danych nietypowych. Brakujące dane należy uzupełnić szacunkowymi danymi. Często zachodzi konieczność agregacji danych czyli ich sumowania (np. zamiana danych kwartalnych na roczne), jak również konieczna może być transformacja danych (np. przeliczenie wartości na osobę),

**Etap wyboru metody** zależy to od wielu czynników. Pierwszy to charakter posiadanych danych (ilościowe, jakościowe). Drugim czynnikiem jest przyjęcie postawy pasywnej lub aktywnej. W postawie pasywnej zakłada się, że przyszłość jest następstwem przeszłości, przy czym w przyszłości występują podobne zależności pomiędzy zmiennymi jak w przeszłości. Metody stosowane po przyjęciu postawy pasywnej to analiza szeregów czasowych oraz wykorzystanie modeli ekonometrycznych ze stałymi w czasie parametrami. Postawa aktywna zakłada, że nie jest aż tak zależna od przeszłości, jak przyjmowano w postawie pasywnej. W przyszłości mogą pojawić się inne niż w przeszłości związki pomiędzy zmiennymi. Konsekwencją przyjęcia adekwatnej postawy może być wybór jednej z metod heurystycznych lub modelu z parametrami zmiennymi w czasie,

**Etap wyznaczenia prognozy oraz ocena jej dopuszczalności** – po wyborze metody i ewentualnym uzyskaniu modelu wyznacza się prognozę. Następnym krokiem jest oszacowanie jej dopuszczalności. Niekiedy możliwe jest wyznaczenie błędu prognozy *ex ante* lub wykorzystanie wiedzy eksperta do oszacowania dopuszczalności prognozy. Jeżeli prognoza zostanie uznana za niedopuszczalną, należy zdiagnozować przyczynę niepowodzenia, a następnie rozpocząć budowę nowej prognozy,

**Etap wykorzystania prognozy oraz jej weryfikacji**, tu prognoza uznana za dopuszczalną zostaje wykorzystana w praktyce zgodnie z określonym celem. Ostatnim etapem powinna być weryfikacja uzyskanej prognozy. Może to nastąpić wtedy, gdy dysponuje się rzeczywistymi danymi, które uprzednio były jedynie prognozowane.

W przypadku prognoz ilościowych wyznacza się liczbowe błędy *ex post*. W przypadku prognoz jakościowych następuje porównanie prognozy ze stanem faktycznym. Weryfikacja jest niezmiernie istotnym etapem, ponieważ pozwala na ocenę procesu prognozowania. Daje informacje prognoście czy przyjęty sposób prognozowania jest dobry czy też należy spróbować go zmodyfikować. W obydwu przypadkach weryfikacja prognozy pozwala na uzyskanie większego doświadczenia w zagadnieniach prognostycznych.

Podział procesów prognostycznych na etapy często implikuje przy ich realizacji najczęściej stosowane następujące reguły (zasady) prognozowania: podstawowa, podstawowa z poprawką, największej wiarygodności i minimalnej straty (Dittmann, 2008, s. 26÷27).

**Reguła podstawowa** – prognozą jest stan zmiennej w przyszłości uzyskany z modelu, przy założeniu, że model będzie aktualny do chwili wyznaczenia prognozy; jest to ekstrapolacja modelu poza zasięg danych, w oparciu o który został wyznaczony.

**Reguła podstawowa z poprawką** – prognozę uzyskaną za pomocą reguły podstawowej można skorygować, gdy występują uzasadnione przypuszczenia, że ostatnio zaobserwowane odchylenia zmiennej prognozowanej od wartości uzyskanych z modelu utrzymają się w przyszłości.

**Reguła największej wiarygodności** – za prognozę przyjmuje się stan zmiennej, któremu odpowiada największe prawdopodobieństwo realizacji (dla rozkładów ciągłych maksimum funkcji gęstości prawdopodobieństwa).

**Reguła minimalnej straty** – za prognozę przyjmuje się stan zmiennej, którego realizacja powoduje minimalne straty; przyjmuje się, że wielkość tych strat jest funkcją błędu prognozy.

Obliczanie prognoz według wybranych faz, etapów i reguł prognozowania pociąga za sobą konieczność każdorazowego obliczania błędów prognozy dla uwiarygodnienia obliczanych prognoz. Wyróżnia się dwa rodzaje błędów prognoz: błędy *ex post* oraz *ex ante*.

**Błędy *ex post*** odzwierciedlają różnicę pomiędzy realizacją zmiennej prognozowanej a . Błędy te wyznacza się dopiero wtedy, gdy zaistnieje chwila, na którą wyznaczono prognozę.

**Błąd *ex ante*** jest oszacowaniem błędu prognozy. Błąd ten określa się przed zaistnieniem chwili, na którą wyznacza się prognozę. Wyznaczany jest jedynie dla prognoz ilościowych opartych na niektórych modelach ekonometrycznych (Maciąg, Pietroń, Kukła, 2013, s. 27÷28).



## **2. BUDOWA MODELU EKONOMETRYCZNEGO**

Najszybszą i najskuteczniejszą w praktyce metodą budowania modelu ekonometrycznego jest realizacja z góry określonego algorytmu, według którego wykonujemy poszczególne etapy konstruowania modelu:

- 1) Optymalny wybór zmiennych objaśniających (niezależnych) spośród zmiennych kandydujących do modelu ekonometrycznego metodą Hellwiga;
- 2) Określenie postaci analitycznej modelu np. funkcją liniową, wykładniczą, potęgową, logarytmiczną, hiperboliczną itp.;
- 3) Estymacja parametrów strukturalnych modelu klasyczną metodą najmniejszych kwadratów;
- 4) Weryfikacja modelu na podstawie teorii hipotez statystycznych przy wykorzystaniu np. testu t-Studenta;
- 5) Wykorzystanie zbudowanego modelu do analizy (opisu przeszłości) oraz wnioskowania w przyszłość (prognozy).

Według wymienionych powyżej pięciu etapów, w dalszej części artykułu, przedstawiono koncepcję budowy przykładowego modelu ekonometrycznego.

### **2.1. Dobór zmiennych objaśniających do modelu ekonometrycznego metodą Hellwiga**

Pierwszym i najważniejszym etapem podczas prognozowania jest odpowiedni dobór zmiennych objaśniających do modelu ekonometrycznego. Często osoby zajmujące się prognozowaniem natrafiają na problem by odpowiednio określić grupę zmiennych objaśniających. Niekiedy prostym rozwiązaniem jest sięgnięcie do teorii ekonomii. Opisuje ona w sposób przyczynowo–skutkowy dużą ilość procesów gospodarczych, dzięki temu dostarcza gotową listę zmiennych objaśniających. Zazwyczaj lista ta jest zbyt długa lub teoria ekonomii mało precyzyjnie określa, które zmienne warto brać pod uwagę. W taki sposób problem optymalnego doboru zmiennych objaśniających z pośród potencjalnych, wcześniej wybranych zmiennych sprowadza się do ich zredukowania. W celu otrzymania optymalnego zbioru zmiennych wykorzystuje się procedury statystyczne.

Ideą wszelkich metod statystycznych, które mają na celu redukcję zbioru wstępnie wytypowanych zmiennych objaśniających jest przestrzeganie zasady, iż w modelu powinny znaleźć się zmienne silnie skorelowane ze zmienną objaśniającą i jednocześnie słabo skorelowane między sobą. Nieprzestrzeganie tej zasady lub tolerowanie zjawiska współliniowości zmiennych objaśniających (współczynniki korelacji między zmiennymi, co do bezwzględnej wartości są bliskie jedności), powoduje wiele niekorzystnych efektów podczas modelowania ekonometrycznego (Kukuła, 2004, s. 16).

Metoda Hellwiga jest jedną z najczęściej stosowanych metod doboru zmiennych objaśniających do modelu ekonometrycznego. Została opracowana w 1969 roku przez polskiego ekonometryka profesora Zdzisława Hellwiga.

Polega na wyborze takiej kombinacji zmiennych objaśniających ze zbioru zmiennych potencjalnych, których współczynnik korelacji liniowej ze zmienną objaśnianą jest jak największy, natomiast współczynnik korelacji liniowej między zmiennymi objaśniającymi występującymi w danej kombinacji jest jak najmniejszy. Nie jest to ściśle kryterium doboru zmiennych, występuje tutaj także kryterium liczbowe czyli pojemność integralna kombinacji nośników informacji. Nośnikami informacji są wszystkie zmienne objaśniające.

Do modelu ekonometrycznego jako zmienne kandydujące wybiera się zmienne objaśniające (niezależne), którym można przypisać następujące oznaczenia:  $x_{1t}, x_{2t}, x_{3t}, x_{4t}, \dots, x_{it}$  oraz zmienną objaśnianą (zależną)  $y_t$ .

Utworzenie macierzy  $R$  współczynników korelacji między zmiennymi objaśniającymi oraz wektora  $R_0$  współczynników korelacji zmiennej objaśnianej  $y_t$  ze zmiennymi objaśniającymi, wymaga wykonania szeregu obliczeń na podstawie wzoru na współczynnik korelacji liniowej Pearsona.

Aby ocenić siłę liniowej zależności między zmienną objaśnianą  $y_t$ , a kolejnymi potencjalnymi zmiennymi objaśniającymi np.:  $x_{1t}, x_{2t}, x_{3t}, x_{4t}, \dots, x_{it}$  do utworzenia wektora  $R_0$ , oblicza się współczynnik korelacji liniowej Pearsona (1). Współczynnik ten definiujemy jako stosunek kowariancji korelowanych zmiennych do iloczynu odchyłeń standardowych tych zmiennych. Definicyjnie współczynnik korelacji liniowej Pearsona można zapisać według poniższej zależności:

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x \cdot s_y} \quad (1)$$

gdzie:

$\text{cov}(x, y)$  – kowariancja pomiędzy zmiennymi  $x$  i  $y$

$s_x$  – odchylenie standardowe zmiennej  $x$

$s_y$  – odchylenie standardowe zmiennej  $y$

Do praktycznego zastosowania w obliczeniach stosuje się zamiast definicyjnego jedynie postać skalarną (2) tego wzoru.

$$r_{xy} = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})}{\sqrt{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2 \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2}} \quad (2)$$

gdzie:

$r_{xy}$  – współczynnik korelacji liniowej zmiennej objaśniającej  $x_{it}$  ze zmienną objaśnianą  $y_t$

$y_t$  – wartość zmiennej objaśnianej

$\bar{y}$  – średnia arytmetyczna zmiennej objaśnianej  $y_t$   
 $\bar{x}$  – średnia arytmetyczna zmiennej objaśniającej  $x_{it}$   
 $x_i$  – wartość zmiennej objaśniającej  
 $n$  – liczba obserwacji

Obliczone współczynniki korelacji liniowej Pearsona przedstawiane są w postaci wektora współczynników korelacji zmiennej objaśnianej i potencjalnych zmiennych objaśniających. Elementami tego wektora są współczynniki korelacji zmiennej  $x_{it}$  ze zmienną objaśnianą  $y_t$ . Wektor ten jest macierzą jednokolumnową z liczbą elementów odpowiadającej liczbie potencjalnych zmiennych objaśniających.

Zastosowanie współczynnika korelacji liniowej Pearsona pozwala także na znalezienie zależności (obliczenie korelacji) pomiędzy potencjalnymi zmiennymi objaśniającymi np.:  $x_{1t}$ ,  $x_{2t}$ ,  $x_{3t}$ ,  $x_{4t}$ , ...,  $x_{it}$ .

Współczynniki te tworzą macierz  $R$  współczynników korelacji (3), która jest macierzą symetryczną, w której:  $r_{ij} = r_{ji}$ . Macierz ta ma wymiary odpowiadające liczbie potencjalnych zmiennych objaśniających. Jeżeli potencjalnych zmiennych objaśniających jest 4, to wymiary macierzy będą wynosiły  $4 \times 4$ . To oznacza, że macierz ma 4 wiersze i 4 kolumny i zawiera współczynniki korelacji zmiennych objaśniających wszystkich możliwych kombinacji tych zmiennych.

$$R = \begin{bmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} & r_{x_1x_4} \\ r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} & r_{x_2x_3} & r_{x_2x_4} \\ r_{x_3x_1} & r_{x_3x_2} & r_{x_3x_3} & r_{x_3x_4} \\ r_{x_4x_1} & r_{x_4x_2} & r_{x_4x_3} & r_{x_4x_4} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Z zaproponowanych zmiennych kandydujących do modelu ekonometrycznego można utworzyć  $2^m - 1$  ich kombinacji (zestawów zmiennych objaśniających), czyli gdy liczba zmiennych wynosi  $m = 4$  otrzymujemy  $2^4 - 1 = 15$  możliwych kombinacji.

Dla każdej zmiennej objaśniającej, w każdej kombinacji oblicza się indywidualną pojemność nośnika informacji  $h_{kj}$ . Jest to stosunek kwadratu współczynnika korelacji między zmienną objaśnianą  $y_t$ , a odpowiednią zmienną objaśniającą  $x_{it}$  do sumy wartości bezwzględnych współczynników korelacji poszczególnych zmiennych objaśniających. Postać skalarna wzoru (4) na indywidualną pojemność nośnika informacji  $h_{kj}$ , stosowana do praktycznych obliczeń na podstawie danych empirycznych:

$$h_{kj} = \frac{r_{0j}^2}{\sum_{i \in I_k} |r_{ij}|} \quad (4)$$

gdzie:

$I_k = \{i: x_i \in K_k\}$  – zbiór indeksów zmiennych wchodzących w skład  $k$  kombinacji, kombinacji  $K_k$   
 $h_{kj}$  – indywidualna pojemność  $j$  zmiennej w  $k$  kombinacji

$r_{0j}$  – współczynnik korelacji  $j$  zmiennej objaśniającej ze zmienną objaśnianą

$\sum_{i \in I_k} |r_{ij}|$  – suma bezwzględnych wartości współczynników korelacji  $j$  zmiennej objaśniającej z pozostałymi zmiennymi objaśniającymi, występującymi w danej kombinacji

Kolejnym krokiem jest obliczenie integralnej pojemności nośników informacji  $H_k$  jako sumy pojemności indywidualnych w ramach każdej z kombinacji.

Ponieważ każdej kombinacji zmiennych, odpowiada wektor  $R_{0k}$  (wektor współczynników korelacji między zmienną objaśnianą a zmiennymi objaśniającymi w  $k$  kombinacji) oraz macierz  $R_k$  (macierz współczynników korelacji między zmiennymi objaśniającymi występującymi w  $k$  kombinacji), dla każdej z kombinacji należy zapisać wektor  $R_{0k}$  i macierz  $R_k$ .

Ostatecznie do modelu wybieramy zmienne objaśniające tej kombinacji, której integralna pojemność nośnika informacji ma wartość maksymalną ( $H_{max}$ ).

## 2.2. Dobór postaci analitycznej modelu metodą heurystyczną

Rozwiązanie Po zredukowaniu wstępnie wybranego zbioru zmiennych kandydujących do modelu ekonometrycznego i wybraniu zmiennych objaśniających, które do tego modelu wejdą należy wybrać postać analityczną modelu. To zadanie jest bardzo pracołłonne. Należy określić przy konstrukcji modelu w jaki sposób zmienna objaśniana  $y_t$  zależy od zmiennych objaśniających  $x_{it}$ .

Wybór postaci funkcyjnej modelu jest łatwy jedynie w przypadku modelu z jedną zmienną objaśniającą (występują techniki pozwalające łatwo określić postać modelu), gdy jest ich więcej zadanie to komplikuje się w sposób istotny (Kukuła, 2004, s. 25). Ekonometrycy często przy wyborze postaci modelu kierują się doświadczeniem, teorią ekonomii czy też apriorycznym doświadczeniem, które podpowiadają im jaką postać powinien przyjąć model. Jednakże, każdą wiedzę trzeba sprawdzić i znaleźć jej empiryczne potwierdzenie.

Metoda heurystyczna jest oparta na analizie wybranych postaci funkcji modeli ekonometrycznych, poprzez porównanie trzech najważniejszych parametrów uzyskanych podczas weryfikacji modeli ekonometrycznych. Tymi parametrami są:

- sprawdzenie istotności statystycznej parametrów strukturalnych modelu testem t-Studenta,
- współczynnik zbieżności  $\varphi^2$ ,
- współczynnik zmienności losowej  $V$ .

Warunkiem koniecznym, ale nie wystraszającym, aby przyjąć określoną postać funkcyjną modelu jest to, aby jego wszystkie zmienne uczestniczące w tym modelu były istotne statystycznie.

Kolejnym warunkiem decydującym o ostatecznym przyjęciu postaci funkcyjnej modelu jest jak najmniejsza wartość współczynnika zbieżności  $\varphi^2$  (jednak nie przekraczająca 5%) oraz jak najmniejsza wartość współczynnika zmienności losowej  $V$  (nie przekraczająca 10%).

Z analizowanych modeli ekonometrycznych, spełniających wszystkie powyższe kryteria, należy wybrać model o takiej postaci funkcyjnej, dla którego współczynnik zbieżności  $\varphi^2$  i współczynnik zmienności losowej  $V$  przyjmują jednocześnie najmniejsze wartości. Wybór taki odzwierciedla najmniejsze błędy szacunku takiego modelu, a tym samym najlepszą jego dobroć.

### 2.3. Szacowanie parametrów strukturalnych modelu ekonometrycznego klasyczną metodą najmniejszych kwadratów

Szacowanie parametrów strukturalnych modelu ekonometrycznego klasyczną metodą najmniejszych kwadratów można realizować metodą macierzową oraz rozwiązywaniem układu równań. W przypadku modeli ekonometrycznych z wieloma zmiennymi (od dwóch zmiennych objaśniających) preferuje się metodę macierzową. Wielkość budowanych macierzy zależy od liczby zmiennych objaśniających. Poniżej przedstawiono przykład (tabela 1) trzech zmiennych objaśniających  $x_{1t}$ ,  $x_{2t}$ ,  $x_{3t}$ , wybranych metodą Hellwiga ze zmiennych kandydujących do modelu ekonometrycznego.

Tabela 1. Przykładowe dane dla trzech zmiennych objaśniających

$t$ numer obserwacji	$y_t$ zmienna objaśniana	$x_{1t}$ zmienna objaśniana	$x_{2t}$ zmienna objaśniana	$x_{3t}$ zmienna objaśniana
1	$y_1$	$x_{11}$	$x_{21}$	$x_{31}$
2	$y_2$	$x_{12}$	$x_{22}$	$x_{32}$
3	$y_3$	$x_{13}$	$x_{23}$	$x_{33}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$y_n$	$x_{1n}$	$x_{2n}$	$x_{3n}$

Zródło: opracowanie własne.

Na bazie tych trzech zmiennych objaśniających  $x_{1t}$ ,  $x_{2t}$ ,  $x_{3t}$ , utworzono trzy różne postaci analitycznych modeli ekonometrycznych:

- liniowy,
- hiperboliczny,
- logarytmiczny.

#### Model liniowy

Empiryczna postać modelu liniowego (5) dla trzech zmiennych objaśniających  $x_{1t}$ ,  $x_{2t}$ ,  $x_{3t}$ :

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t} + \xi_t \quad (5)$$

gdzie:

- $y_t$  – zmienna objaśniana
- $x_{1t}, x_{2t}, x_{3t}$  – zmienne objaśniające
- $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – parametry strukturalne modelu
- $\xi_t$  – czynnik losowy

Do łatwiejszego obliczenia parametrów strukturalnych modelu liniowego klasyczną metodą najmniejszych kwadratów (macierzową), należy stworzyć tabelę pomocniczą (tabela 2), która posłuży do stworzenia macierzy  $X^T X$  i  $X^T y$ .

Tabela 2. Tabela pomocnicza dla modelu liniowego

$t$	$y_t$	$x_{1t}$	$x_{2t}$	$x_{3t}$	$x_{1t}^2$	$x_{2t}^2$	$x_{3t}^2$	$x_{1t}x_{2t}$	$x_{1t}x_{3t}$	$x_{2t}x_{3t}$	$y_t x_{1t}$	$y_t x_{2t}$	$y_t x_{3t}$
1													
2													
⋮													
n													
$\Sigma$													

Źródło: opracowanie własne.

Model liniowy stanowi często bazę wyjściową do budowy modeli nieliniowych, ponieważ próbując analizować modele nieliniowe sprowadzamy je do postaci liniowej, która ułatwia obliczenia.

### Model hiperboliczny

Empiryczna postać modelu hiperbolicznego (6) dla trzech zmiennych objaśniających  $x_{1t}, x_{2t}, x_{3t}$ :

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{x_{1t}} + \alpha_2 \frac{1}{x_{2t}} + \alpha_3 \frac{1}{x_{3t}} + \xi_t \quad (6)$$

gdzie:

- $y_t$  – zmienna objaśniana
- $x_{1t}, x_{2t}, x_{3t}$  – zmienne objaśniające
- $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – parametry strukturalne modelu
- $\xi_t$  – czynnik losowy

Model hiperboliczny sprowadza się do postaci liniowej (7) poprzez zastąpienie zmiennych tego modelu nowymi zmiennymi:

$$\frac{1}{x_{1t}} = x_{1t} \quad \frac{1}{x_{2t}} = x_{2t} \quad \frac{1}{x_{3t}} = x_{3t} \quad (7)$$

Do łatwiejszego obliczenia parametrów strukturalnych modelu hiperbolicznego klasyczną metodą najmniejszych kwadratów (macierzową), należy stworzyć tabelę pomocniczą (tabela 3), która posłuży do stworzenia macierzy  $X^T X$  i  $X^T y$ .

Tabela 3. Tabela pomocnicza dla modelu hiperbolicznego

$t$	$y_t$	$\frac{1}{x_{1t}}$	$\frac{1}{x_{2t}}$	$\frac{1}{x_{3t}}$	$x_{1t}^2$	$x_{2t}^2$	$x_{3t}^2$	$x_{1t}x_{2t}$	$x_{1t}x_{3t}$	$x_{2t}x_{3t}$	$y_t x_{1t}$	$y_t x_{2t}$	$y_t x_{3t}$
1													
2													
...													

n													
$\sum$													

Źródło: opracowanie własne.

Tworzenie kolejnych modeli nieliniowych realizuje się podobnym algorytmem – przechodząc z modelu nieliniowego do liniowego.

### Model logarytmiczny

Empiryczna postać modelu logarytmicznego (8) dla trzech zmiennych objaśniających  $x_{1t}, x_{2t}, x_{3t}$ :

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \log x_{1t} + \alpha_2 \log x_{2t} + \alpha_3 \log x_{3t} + \xi_t \quad (8)$$

gdzie:

$y_t$  – zmienna objaśniana

$x_{1t}, x_{2t}, x_{3t}$  – zmienne objaśniające

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – parametry strukturalne modelu

$\xi_t$  – czynnik losowy

Model logarytmiczny sprowadza się do postaci liniowej (9) poprzez zastąpienie zmiennych tego modelu nowymi zmiennymi:

$$\log x_{1t} = x_{1t} \quad \log x_{2t} = x_{2t} \quad \log x_{3t} = x_{3t} \quad (9)$$

Do łatwiejszego obliczenia parametrów strukturalnych modelu logarytmicznego klasyczną metodą najmniejszych kwadratów (macierzową), należy stworzyć tabelę pomocniczą (tabela 4), która posłuży do stworzenia macierzy  $X^T X$  i  $X^T y$ .

Tabela 4. Tabela pomocnicza dla modelu logarytmicznego

t	$\log y_t$	$\log x_1$	$\log x_2$	$\log x_3$	$x_{1t}^2$	$x_{2t}^2$	$x_{3t}^2$	$x_{1t}x_{2t}$	$x_{1t}x_{3t}$	$x_{2t}x_{3t}$	$y_t x_{1t}$	$y_t x_{2t}$	$y_t x_{3t}$
1													
2													
...													
n													
$\sum$													

Źródło: opracowanie własne.

Dalsze etapy obliczeń realizuje się według jednolitego algorytmu przyjętego dla modeli liniowych, gdyż modele nieliniowe (hiperboliczny i logarytmiczny) zostały sprowadzone do postaci modelu liniowego. Kolejną fazą obliczeń parametrów strukturalnych modeli ekonometrycznych jest tworzenie macierzy momentów zmiennych objaśniających (10):

$$X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum x_{1t} & \sum x_{2t} & \sum x_{3t} \\ \sum x_{1t} & \sum x_{1t}^2 & \sum x_{1t}x_{2t} & \sum x_{1t}x_{3t} \\ \sum x_{2t} & \sum x_{1t}x_{2t} & \sum x_{2t}^2 & \sum x_{2t}x_{3t} \\ \sum x_{3t} & \sum x_{1t}x_{3t} & \sum x_{2t}x_{3t} & \sum x_{3t}^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Do stworzenia macierzy momentów zmiennych objaśniających wykorzystujemy gotowy wzór tej macierzy, wypełniając jej elementy odpowiednimi obliczonymi wartościami

w tabelach pomocniczych (tabela 2, 3, 4). Warto nadmienić, że wzory takich macierzy zależą od liczby zmiennych objaśniających wykorzystanych do tworzenia modelu ekonometrycznego.

Podobnie jest z tworzeniem wektora momentów zmiennych objaśniających zmiennej objaśnianej (11):

$$X^T y = \begin{bmatrix} \sum y_t \\ \sum y_t x_{1t} \\ \sum y_t x_{2t} \\ \sum y_t x_{3t} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Kolejnym etapem tworzenia modelu ekonometrycznego jest wyznaczenie macierzy odwrotnej (12) dla  $X^T X$ :

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{\det(X^T X)} [(X^T X)^D]^T \quad (12)$$

Aby to uczynić zależy obliczyć wyznacznik macierzy  $\det(X^T X)$ . Obliczony wyznacznik informuje czy macierz jest osobliwa czy też nieosobliwa. Oznacza to, że jeżeli wyznacznik macierzy  $\det(X^T X) = 0$  to macierz jest osobliwa, czyli nie istnieje macierz odwrotna i zadanie nie ma rozwiązania metodą macierzową. Natomiast, jeżeli wyznacznik macierzy  $\det(X^T X) \neq 0$  to macierz jest nieosobliwa i istnieje możliwość obliczenia macierzy odwrotnej. Następnie przystępujemy do obliczenia macierzy dopełnień algebraicznych.

Ponieważ macierz  $X^T X$  jest macierzą kwadratową i symetryczną oraz macierz dopełnień  $(X^T X)^D$  jest również macierzą kwadratową i symetryczną, to:  $(X^T X)^D = [(X^T X)^D]^T$ .

Powyższe, tak obliczone elementy możemy podstawić do wzoru na macierz odwrotną i ją obliczyć. Dzięki temu możemy przejść do ostatniego etapu, czyli obliczania wektora ocen parametrów strukturalnych (13):

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad a = (X^T X)^{-1} \cdot X^T y \quad (13)$$

Obliczone parametry strukturalne modelu, poprzez pomnożenie macierzy odwrotnej i wektora momentów zmiennych objaśniających zmiennej objaśnianej, pozwalają aby oszacowane modele przyjęły teoretyczną postać modelu ekonometrycznego dla:

- modelu liniowego:  $\hat{y}_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + a_3 x_{3t}$ ,
- modelu hiperbolicznego:  $\hat{y}_t = a_0 + a_1 \frac{1}{x_{1t}} + a_2 \frac{1}{x_{2t}} + a_3 \frac{1}{x_{3t}}$ ,
- modelu logarytmicznego:  $\hat{y}_t = a_0 + a_1 \log x_{1t} + a_2 \log x_{2t} + a_3 \log x_{3t}$ .



Po uzyskaniu trzech różnych postaci analitycznych modelu ekonometrycznego musimy wybrać taką postać modelu, która zawiera najmniejsze błędy szacunku parametrów strukturalnych, a zatem najlepiej opisuje badane zjawisko.

#### 2.4. Weryfikacja modelu ekonometrycznego

Weryfikacja modelu ekonometrycznego przebiega podobnie dla modelu liniowego, hiperbolicznego i logarytmicznego. Parametry struktury stochastycznej (parametry rozkładu składnika losowego), pomagają określić czy model został dobrze dopasowany do posiadanych danych empirycznych.

Powszechnie stosowanymi miernikiem wykorzystywanym w tej analizie są:

- wariancja składnika resztkowego  $s^2$ ,
- odchylenie standardowe składnika resztkowego  $s$ ,
- macierz wariancji i kowariancji estymatorów parametrów  $D^2(a)$ ,
- współczynnik zbieżności  $\varphi^2$ ,
- współczynnik determinacji  $R^2$ ,
- współczynnik korelacji wielorakiej  $R$ ,
- test istotności statystycznej parametrów strukturalnych modelu.

#### Wariancja składnika resztkowego $s^2$ (estymator wariancji składnika losowego $\sigma^2$ )

Z ogólnej definicji ekonometrycznej wynika, że wariancja  $s^2$  składnika resztkowego (14) jest to średnia arytmetyczna sumy kwadratów reszt. Resztami w ekonometrii nazywamy różnicę zmiennej objaśnianej  $y_t$  i jej wartości teoretycznej  $\hat{y}_t$ . Postać skalarna wzoru na wariancję składnika resztkowego  $s^2$ , stosowana do praktycznych obliczeń na podstawie danych empirycznych:

$$s^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2 \quad (14)$$

gdzie:

- $s^2$  – wariancja składnika resztkowego
- $y_t$  – zmienna objaśniana
- $\hat{y}_t$  – zmienna teoretyczna
- $n$  – liczba obserwacji
- $k$  – liczba parametrów strukturalnych

#### Odchylenie standardowe składnika resztkowego $s$

Odchylenie standardowe (15) informuje o ile *średnio rzecz biorąc* dane teoretyczne różnią się od danych empirycznych.

$$s = \sqrt{s^2} \quad (15)$$

#### Macierz wariancji i kowariancji estymatorów parametrów $D^2(a)$

$$D^2(a) = s^2(X^T X)^{-1} \quad (16)$$

Macierz wariancji i kowariancji estymatorów parametrów (16) jest specyficzną macierzą kwadratową. „Szczególne znaczenie mają elementy diagonalne tej macierzy (wariancje estymatorów parametrów). Pierwiastki z nich to błędy średnie szacunku parametrów (17). Natomiast poza główną przekątną znajdują się kowariancje estymatorów parametrów” (Kukuła, 2004, s. 41). Zatem, błędy średnie szacunku parametrów strukturalnych, obliczamy na podstawie wzoru:

$$D(a_j) = \sqrt{D^2(a)} \quad (17)$$

### Współczynnik zbieżności $\varphi^2$

Współczynnik zbieżności  $\varphi^2$  jest to stosunek sumy kwadratów reszt do sumy kwadratów odchyleń (18). Odchyleniem w statystyce nazywamy różnicę między wartością zmiennej objaśnianej  $y_t$ , a jej średnią arytmetyczną. Postać skalarna wzoru na współczynnik zbieżności  $\varphi^2$ , stosowany do praktycznych obliczeń na podstawie danych empirycznych:

$$\varphi^2 = \frac{\sum(y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum(y_t - \bar{y})^2} \quad (18)$$

gdzie:

$\sum(y_t - \hat{y}_t)^2$  – sumy kwadratów reszt,

$\sum(y_t - \bar{y})^2$  – sumy kwadratów odchyleń.

Współczynnik zbieżności  $\varphi^2$ , informuje jaką część zmienności zmiennej objaśnianej  $y_t$  stanowią wahania przypadkowe – są dziełem przypadku. Ponadto informuje, jaka część zmienności zmiennej objaśnianej  $y_t$  nie jest wyjaśniona przez model. Dopuszczalny błąd tego współczynnika dla modeli ekonometrycznych przyjmuje się najczęściej 5%.

### Współczynnik determinacji $R^2$

Współczynnik determinacji (19) jest przeciwieństwem współczynnika zbieżności.

$$R^2 = 1 - \varphi^2 \quad (19)$$

Określa, jaka część zmienności zmiennej objaśnianej  $y_t$  jest objaśniona przez ten model.

### Współczynnik korelacji wielorakiej $R$

Współczynnik korelacji wielorakiej  $R$  (20) jest to współczynnik korelacji, pomiędzy zmienną objaśnianą  $y_t$  a zmiennymi objaśniającymi  $x_{it}$ .

$$R = \sqrt{1 - \varphi^2} = \sqrt{R^2} \quad (20)$$

Dla poprawności budowy modelu ekonometrycznego zalecane jest, aby zależność pomiędzy zmienną objaśnianą  $y_t$ , a zmiennymi objaśniającymi  $x_{it}$  była jak najwyższa – najlepiej zbliżona do jedności.

### Współczynnik zmienności losowej $V$

Współczynnik zmienności losowej (21) informuje jaką część średniego poziomu zmiennej objaśnianej  $y_t$  stanowią wahania przypadkowe (lub stanowi odchylenie standardowe  $s$ ).

$$V = \frac{s}{\bar{y}} \cdot 100\% \quad (21)$$

Na ogół przyjmuje się, że dopuszczalne wahania przypadkowe dla modelu ekonometrycznego są nie większe niż 10%.

### Test istotności statystycznej parametrów strukturalnych modelu

Najważniejszym etapem weryfikacji modelu jest weryfikacja istotności statystycznej ocen parametrów strukturalnych. Wymaga ona określonego toku postępowania:

- zakładając, że składnik losowy modelu ma wielowymiarowy rozkład normalny  $\xi_t \sim N(0, \sigma^2 I)$ ,
- stawiamy hipotezę zerową  $H_0: \alpha_i = 0$ ;
- wobec hipotezy alternatywnej  $H_1: \alpha_i \neq 0$ .

„Hipoteza zerowa zakłada, że parametr  $\alpha_i$  nieistotnie różni się od zera, tzn. że zmienna  $x_{it}$ , przy której on stoi wywiera nieistotny wpływ na zmienną objaśnianą  $y_t$ . Odrzucenie hipotezy  $H_0$  oznacza przyjęcie hipotezy alternatywnej  $H_1$  głoszącej, że wartość parametru istotnie różni się od zera (czyli zmienna  $x_{it}$  wywiera istotny wpływ na zmienną objaśnianą  $y_t$ )” (Kukuła, 2004, s. 51).

Test istotności pozwalający na weryfikację hipotezy  $H_0: \alpha_i = 0$  oparty jest na rozkładzie statystyki t-Studenta określonej wzorem:

$$t_{\alpha_i} = \frac{a_i - \alpha_i}{D(a_i)} \quad (22)$$

gdzie:

- $a_i$  – ocena  $i$  parametru strukturalnego
- $\alpha_i$  – empiryczna wartość  $i$  parametru
- $D(a_i)$  – błąd średni szacunku parametru

Czyli hipotezy dla poszczególnych parametrów  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  (hipotezy szczegółowe) przedstawiają się następująco:

- 1)  $H_0: \alpha_0 = 0$        $H_1: \alpha_0 \neq 0$
- 2)  $H_0: \alpha_1 = 0$        $H_1: \alpha_1 \neq 0$
- 3)  $H_0: \alpha_2 = 0$        $H_1: \alpha_2 \neq 0$
- 4)  $H_0: \alpha_3 = 0$        $H_1: \alpha_3 \neq 0$

Zgodnie z hipotezą zerową  $H_0: \alpha_i = 0$ , wzór przyjmuje postać ogólną:

$$t_{\alpha_i} = \frac{a_i}{D(a_i)} \quad (23)$$

oraz postaci szczegółowe:

$$t_{a_0} = \frac{a_0}{D(a_0)} \quad t_{a_1} = \frac{a_1}{D(a_1)} \quad t_{a_2} = \frac{a_2}{D(a_2)} \quad t_{a_3} = \frac{a_3}{D(a_3)} \quad (24)$$

Aby przystąpić do weryfikacji istotności statystycznej parametrów strukturalnych musimy określić **kryteria przyjęcia i odrzucenia hipotezy zerowej  $H_0$** :

- 1) Jeżeli  $|t_{a_i}| > t_\alpha$  należy odrzucić hipotezę  $H_0$  na rzecz hipotezy alternatywnej  $H_1$  (przyjmujemy hipotezę  $H_1$ );
- 2) Jeżeli  $|t_{a_i}| \leq t_\alpha$  nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy  $H_0$  (czyli pozostaje hipoteza  $H_0$ ).

Przy weryfikacji hipotezy zerowej  $H_0$  należy przyjąć wartość krytyczną statystyki  $t$  z tablic rozkładu teoretycznego t-Studenta dla poziomu istotności  $\alpha$  przy  $n-k$  stopniach swobody tzn.:  $t_{\alpha;n-k}$  i porównać ją z wartością bezwzględną obliczonej statystyki t-Studenta. W ostateczności do modelu ekonometrycznego wchodzi tylko te zmienne objaśniające, których parametry strukturalne są istotne statystycznie, czyli te zmienne z parametrem  $\alpha_i$ , dla którego przyjęto hipotezę alternatywną  $H_1$ . Pozostałe zmienne objaśniające z parametrem  $\alpha_i$ , dla których nie przyjęto hipotezy alternatywnej  $H_1$ , w dalszym modelowaniu nie biorą już udziału.

Jeżeli chociaż w jednej z hipotez szczegółowych, nie odrzucono hipotezy zerowej  $H_0$  na rzecz hipotezy alternatywnej  $H_1$ , należy proces modelowania rozpocząć od początku.

### 3. PROGNOZA EKONOMETRYCZNA PUNKTOWA I PRZEDZIAŁOWA

Prognozę zmiennej objaśnianej  $y_T$  w okresie prognozowanym  $T$  buduje się, bazując na modelu ekonometrycznym z oszacowanymi parametrami przy założeniu, że zmienne objaśniające modelu przyjmą określone z góry wartości  $x_{iT}$ . W predykcji ekonometrycznej wysuwa się dwa postulaty. Po pierwsze wynikiem każdego procesu predykcji powinna być nie tylko prognoza, ale także wartość odpowiedniego miernika dokładności predykcji. Po drugie predykcja powinna być efektywna, tzn. miernik dokładności predykcji powinien kształtować się na korzystnym poziomie (Kukuła, 2004, s. 113).

Aby wyznaczyć prognozę wartości zmiennej objaśnianej  $y_T$  w okresie prognozowanym  $T$ , trzeba znać wartości zmiennych objaśniających  $x_{iT}$  w tym okresie (czyli wektor założonych wartości zmiennych objaśniających (25) w okresie prognozowanym). Zapisujemy je np. dla trzech zmiennych objaśniających w postaci podanego poniżej wektora  $x_*$ . Przy czym jego pierwszy element (przy parametrze  $a_0$ ) przyjmuje stałą wartość, równą tożsamościowo 1 ( $x_{0T} \equiv 1$ ).

$$x_* = \begin{bmatrix} 1 \\ x_{1T} \\ x_{2T} \\ x_{3T} \end{bmatrix} \quad (25)$$

### Prognoza punktowa

Prognozę punktową wartości zmiennej  $y_T^P$  w okresie prognozowanym  $T$  możemy wyznaczyć podstawiając, do wzoru modelu ekonometrycznego (26) z oszacowanymi parametrami, wartości  $x_{iT}$ .

$$y_T^P = a_0 x_{0T} + a_1 x_{1T} + a_2 x_{2T} + a_3 x_{3T} \quad (26)$$

Prognoza punktowa wyznaczana jest za pomocą jednej liczby, która stanowi możliwie najlepszą ocenę przyszłej realizacji zmiennej prognozowanej.

### Prognoza przedziałowa

Wynikiem predykcji w prognozie przedziałowej (27) jest przedział liczbowy, który z określonym prawdopodobieństwem zawiera przyszłą realizację zmiennej prognozowanej  $y_T$ . Ustala się ją według zależności:

$$P\{y_T^P - t_\alpha V_T < y_T < y_T^P + t_\alpha V_T\} = 1 - \alpha \quad (27)$$

gdzie:

$P$  – prawdopodobieństwo, że zmienna prognozowana  $y_T$  przyjmie wartość z tego przedziału

$y_T^P$  – wartość prognozy punktowej

$V_T$  – średni błąd predykcji

$t_\alpha$  – wartość statystyki t-Studenta dla przyjętego poziomu istotności  $\alpha$ , przy  $n-k$  stopniach swobody, odczytana z tablic rozkładu teoretycznego t-Studenta

### Szacowanie błędów prognozy

„W praktyce dysponujemy ocenami parametrów strukturalnych, a nie prawdziwymi ich wartościami, dlatego pojawiają się błędy w procesie predykcji. Dodatkowym źródłem popełnianych błędów są wahania składnika losowego oraz błędy szacunku parametrów strukturalnych. Popełniając błędy w procesie predykcji, musimy określić rząd wielkości błędu” (Kukuła, 2004, s. 113). Do tego celu wykorzystuje się mierniki oceny dokładności predykcji: *ex ante* i *ex post*. Pierwsza grupa błędów wyznaczana jest przed zaistnieniem okresu, na który obliczana była prognoza i pozwala jedynie na oszacowanie jej trafności. Drugi rodzaj błędu pokazuje różnicę pomiędzy faktyczną realizacją zmiennej prognozowanej, a prognozą (Ziółkowski, Misiuda, 2015, s. 214).

Wartość średniego błędu predykcji  $V$  (miara *ex ante*) dla prognozy punktowej, wyznacza się obliczając pierwiastek kwadratowy z wariancji predykcji  $V^2$  (28), korzystając np. ze wzoru skalarnego, w którym wykorzystujemy macierz wariancji i kowariancji  $D^2(a)$  oraz elementy wektora założonych wartości zmiennych objaśniających w okresie prognozowanym  $x_*$ .

$$V^2 = \sum_{j=0}^{k-1} x_{jT}^2 D^2(a_j) + 2 \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{s>0}^{k-1} x_{jT} x_{sT} \text{cov}(a_j, a_s) + \sigma_T^2 \quad (28)$$

gdzie:

$x_{jT}, x_{sT}$  – założone wartości zmiennych objaśniających

$D^2(a_j)$  – wariancja estymator  $a_j$

$\text{cov}(a_j, a_s)$  – kowariancja estymatorów  $a_j, a_s$

$\delta$  – wariancja składnika losowego, w praktyce przyjmuje się, że:  $\delta_T^2 = s^2$

Macierz wariancji i kowariancji (29) przyjmuje następującą postać:

$$D^2(a) = \begin{bmatrix} D^2(a_0) & \text{cova}_0a_1 & \text{cova}_0a_2 & \text{cova}_0a_3 \\ \text{cova}_1a_0 & D^2(a_1) & \text{cova}_1a_2 & \text{cova}_1a_3 \\ \text{cova}_2a_0 & \text{cova}_2a_1 & D^2(a_2) & \text{cova}_2a_3 \\ \text{cova}_3a_0 & \text{cova}_3a_1 & \text{cova}_3a_2 & D^2(a_3) \end{bmatrix} \quad (29)$$

Średni błąd predykcji  $V$  (30) informuje, o ile średnio rzecz biorąc, rzeczywiste zaobserwowane wartości zmiennej  $y_T$  w prognozowanym okresie  $T$ , będą odchyłać się od wartości prognozy  $y_T^P$ .

$$V = \sqrt{V^2} \quad (30)$$

Natomiast częściej stosowaną w praktyce jest metoda obliczania procentowej względnej wartości błędu średniego predykcji (31), którą wyrażamy wzorem:

$$V_{wz} = \frac{V}{y_T^P} \cdot 100\% \quad (31)$$

Względna wartość błędu średniego predykcji jest to stosunek bezwzględnego średniego błędu predykcji do wielkości prognozy punktowej wyrażony w procentach. Im mniejsza wartość błędu procentowego, tym prognoza została lepiej obliczona.

Obliczone prognozy punktowa i przedziałowa oraz błędy średnie predykcji są miarami *ex ante*. Natomiast miary *ex post* wymagają posiadania wartości empirycznych zmiennej objaśnianej  $y_T$  w okresie objętym prognozą. Dostęp do tych danych byłby możliwy dopiero po okresie objętym prognozą, ponieważ posiadamy dane empiryczne z minionego okresu i porównujemy je z dokonaną prognozą.

#### 4. PODSUMOWANIE

Problem określenia prognozy ekonometrycznej opartej na budowie, weryfikacji i zastosowania modeli ekonometrycznych w logistyce jest trudnym i złożonym zagadnieniem badawczym. Menadżerowie logistyki niejednokrotnie w swojej praktyce zawodowej muszą zmierzyć się po pierwsze z problemem pozyskania danych empirycznych, analizy i odpowiedniego ich doboru, a po drugie ze złożoną procedurą obliczeniową opartą na modelowaniu ekonometrycznym. Niezwykle ważna jest również umiejętność kompleksowej interpretacji otrzymanych wyników modelowania ekonometrycznego i prognozowania.

Współcześnie można powszechnie korzystać z gotowych programów informatycznych wspomagających modelowanie i prognozowanie ekonometryczne. Najważniejszym jednak jest, aby te narzędzia umieć skutecznie wykorzystywać. Do tego potrzebna jest podstawowa, gruntowna wiedza ekonometryczna, którą starano się ukazać w tym artykule.

Autorka zdaje sobie sprawę z faktu, iż nie wyczerpała do końca wszystkich możliwych, stosowanych w praktyce narzędzi i metod modelowania i prognozowania ekonometrycznego. Dużą grupę stanowią modele matematyczne służące do prognozy opartej na szeregach czasowych (chronologicznych). Do tej grupy należą najczęściej wykorzystywane metody, takie jak: wyrównania wykładniczego (metoda Browna), trendu poruszającego i wag harmonicznych oraz średnich ruchomych. Zatem, dalsze dociekania naukowe w tej kwestii, mogłyby stać się przyczynkiem do podjęcia tego tematu również przez innych autorów.

Rozważania podjęte w tej pracy pomogą zrozumieć zagadnienia prognozowania, a ponadto wskażą kierunki dalszych badań empirycznych, w których istnieje możliwość zastosowania narzędzi ekonometrycznych do prognozowania, a co za tym idzie do zastosowania ich w logistyce przedsiębiorstwa.

## LITERATURA

- Publikacje książkowe jednego autora:

- 1) Dittmann P. (2008). *Prognozowanie w przedsiębiorstwie. Metody i ich zastosowanie*. Kraków: Oficyna Wolters Kluwer Business.
- 2) Krawczyk S. (2001). *Metody ilościowe w planowaniu (działalności przedsiębiorstwa)*. Warszawa: Wydawnictwo C.H. Beck.
- 3) Schroeder J. (1997). *Badania Marketingowe Rynków Zagranicznych.*, Poznań: Akademia Ekonomiczna w Poznaniu.
- 4) Sobczyk M. (2008). *Prognozowanie. Teoria. Przykłady. Zadania*. Warszawa: PLACET.

- Publikacje książkowe wielu autorów:

- 5) Jełowicki M., Kieźuń W., Leoński Z., Ostapczuk B. (1979). *Teoria organizacji i zarządzania*. Warszawa: PWN.
- 6) Maciąg A., Pietroń R., Kukła S. (2013). *Prognozowanie i symulacja w przedsiębiorstwie*. Warszawa: PWE.
- 7) Witkowski M., Klimanek T. (2006). *Prognozowanie gospodarcze i symulacje w przykładach i zadaniach*. Poznań: Akademia Ekonomiczna w Poznaniu.
- 8) Zielaś A., Pawelek B., Wanat S. (2003). *Prognozowanie ekonometryczne. Teoria. Przykłady. Zadania*. Warszawa: PWN.

- Publikacje książkowe redagowane:
  - 8) Kukuła K. (red.). (2004). *Wprowadzenie do ekonometrii w przykładach i zadaniach*. Warszawa: PWN.
  - 9) Trzaskalik T. (red.). (1998). *Modelowanie preferencji a ryzyko*. Katowice: Akademia Ekonomiczna im. Karola Adamieckiego.
- Artykuły w czasopiśmie:
  - 10) Grzelak M., Ziółkowski J. (2014). Model ekonomicznej wielkości zamówienia (EOQ). *Systemy logistyczne Wojsk*, nr 41/2014, 379÷388.
  - 11) Janicki A., Wojciechowski A. (2007). Popyt i podaż jako podstawowy czynnik generowania przepływów w łańcuchu logistycznym. *Systemy logistyczne Wojsk*, nr 33/2007, 137÷150.
  - 12) Kurasiński Z., Bartosiewicz S. (2012). Koncepcja zwiększania efektywności wykorzystania świadczonych usług logistycznych przez centra logistyczne na potrzeby rynku. *Przedsiębiorczość i zarządzanie*, tom XIII – zeszyt 15 – 2012, 117÷134.
  - 13) Ziółkowski J., Misiuda D. (2015). Wybrane metody prognozowania popytu na przykładach liczbowych. *Systemy logistyczne Wojsk*, nr 43/2015, 214÷223.
- Źródła internetowe:
  - 14) <http://pbryzi.fm.interia.pl/W/SN.htm> (07.04.2016)