

ZAMKNIĘTE ZADANIE TRANSPORTOWE – PRZYKŁAD LICZBOWY NETWORK PROGRAMMING – EXAMPLE

Karolina BONKOWSKA

karolina.bonkowska@student.wat.edu.pl

Jarosław ZIÓLKOWSKI

jaroslaw.ziolkowski@wat.edu.pl

Wojskowa Akademia Techniczna

Wydział Logistyki

Instytut Logistyki

Streszczenie: Złożono określoną sieć dystrybucji, dla której przeprowadzono obliczenia trzema wybranymi metodami, tj. metodą kąta północno – zachodniego, metodą minimalnego elementu macierzy oraz metodą VAM. W efekcie uzyskano optymalne rozwiązanie końcowe.

Abstract: This task is solved by successive approximations by using classical methods: north-west angle, the minimum element of the matrix and the Vogel's Approximation Method. As a result of the calculations the lowest score obtained for the one of three above mentioned methods.

Słowa kluczowe: optymalizacja, zamknięte zadanie transportowe, logistyka, transport

Keywords: optimization, network programming, logistics, transport

Wprowadzenie

Zamknięte zadanie transportowe jest jednym z zagadnień problematyki transportu w logistyce dystrybucji. Algorytm rozwiązania tego zadania jest podstawą m.in. do projektowania sieci transportowych w ujęciu przestrzennym. Należy znaleźć początkowe rozwiązanie bazowe, a następnie dokonać weryfikacji, polegającej na znalezieniu rozwiązania optymalnego.

1. Założenia

Wybrany przykład przedstawia trzech dostawców D_A , D_B , D_C , którzy dostarczają produkt jednorodny gatunkowo do czterech odbiorców O_1 , O_2 , O_3 , O_4 . Plan przewozowy należy zaprojektować w taki sposób, aby koszty przewozu były minimalne. W poniższym zadaniu popyt równy jest podaży. Dane dotyczące popytu, podaży oraz kosztów przewozu jednostki towaru pomiędzy dostawcami i odbiorcami zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Tabela przewozów w rozpatrywanej sieci dystrybucji

	O_1	O_2	O_3	O_4	Podaż
D_A	$k_{A1}=5$	$k_{A2}=10$	$k_{A3}=8$	$k_{A4}=9$	110
D_B	$k_{B1}=9$	$k_{B2}=7$	$k_{B3}=11$	$k_{B4}=9$	80
D_C	$k_{C1}=4$	$k_{C2}=6$	$k_{C3}=7$	$k_{C4}=10$	90
Popyt	80	70	60	70	280

Źródło: Opracowanie własne

Analizując problem należy sformułować następujące warunki ograniczające:

➤ dla dostawców:

$$w_{A1} + w_{A2} + w_{A3} + w_{A4} = 100$$

$$w_{B1} + w_{B2} + w_{B3} + w_{B4} = 120$$

$$w_{C1} + w_{C2} + w_{C3} + w_{C4} = 80$$

➤ dla odbiorców:

$$w_{A1} + w_{B1} + w_{C1} = 60$$

$$w_{A2} + w_{B2} + w_{C2} = 70$$

$$w_{A3} + w_{B3} + w_{C3} = 90$$

$$w_{A4} + w_{B4} + w_{C4} = 80$$

Funkcja celu, która jest rozumiana jako minimalny koszt przewozu, przyjmuje następującą postać:

$$Z_0 = 4w_{A1} + 6w_{A2} + 11w_{A3} + 9w_{A4} + 8w_{B1} + 14w_{B2} + 12w_{B3} + 7w_{B4} + 11w_{C1} + 5w_{C2} + 6w_{C3} + 13w_{C4} = \min$$

2. Przykład liczbowy

Etap 1. Konstruowanie dopuszczalnego rozwiązania bazowego

Istnieje wiele metod, które wspomagają otrzymanie początkowego rozwiązania bazowego. W rozpatrywanym przykładzie zostały zastosowane następujące metody:

- metoda kąta północno – zachodniego (metoda N – W)
- metoda minimalnego elementu macierzy kosztów
- metoda VAM (*Vogel's Approximation Method*).

1. Metoda kąta północno-zachodniego

Najprostszą metodą, w której można otrzymać początkowe rozwiązanie bazowe jest metoda kąta północno – zachodniego. Polega ona na kolejnym przyporządkowywaniu zmiennym odpowiednich wartości, za każdym razem do tych tras, które znajdują się w lewym górnym rogu tabeli przewozów. Tabela 2 przedstawia początkowe rozwiązanie bazowe otrzymane metodą kąta północno – zachodniego.

Tabela 2. Początkowe rozwiązanie bazowe: metoda kąta północno – zachodniego

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	Podaż
D _A	60	40	0	0	100
D _B	0	30	90	0	120
D _C	0	0	0	80	80
Popyt	60	70	90	80	280 280

Źródło: Opracowanie własne

Wartość funkcji celu dla tego rozwiązania wynosi:

$$Z_0 = 4 * 60 + 6 * 40 + 14 * 30 + 12 * 90 + 13 * 80 = 3020.$$

2. Metoda minimalnego elementu macierzy

Istotą metody minimalnego elementu macierzy jest rozmieszczenie przewozów na tych trasach, na których koszty są najniższe. W efekcie otrzymuje się początkowe rozwiązanie bazowe przedstawione w tabeli 3.

Tabela 3. Początkowe rozwiązanie bazowe: metoda minimalnego elementu macierzy

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	Podaż
D _A	60	0	40	0	100
D _B	0	0	40	80	120
D _C	0	70	10	0	80
Popyt	60	70	90	80	280

Źródło: Opracowanie własne

Wartość funkcji celu dla tego rozwiązania wynosi:

$$Z_0 = 4 * 60 + 11 * 40 + 12 * 40 + 7 * 80 + 5 * 70 + 6 * 10 = 2130 .$$

3. Metoda VAM (Vogel`s Approximation Method)

Metoda VAM jest jedną z metod umożliwiających wyznaczenie rozwiązania dopuszczalnego. Polega na wyszukaniu w danym cyklu różnic Δh_i oraz Δw_i między najtańszą (k_{ia}) a drugą co do kosztu możliwością dostawy (k_{ie}).

$$\Delta h_i = k_{ie} + k_{ia}$$

$$\Delta w_i = k_{ie} + k_{ia}$$

Wyniki wykonanych obliczeń prezentuje tabela 4.

Tabela 4. Różnice kosztowe w metodzie VAM dla pierwszej iteracji

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	ΔH
D _A	4	6	11	9	2
D _B	8	14	12	7	1
D _C	11	5	6	13	1
ΔW	4	1	5	2	

Źródło: Opracowanie własne

Kolejnym krokiem jest wyszukanie wiersza lub kolumny z różnicą o największej wartości. Następnie w wyznaczony wiersz lub kolumnę należy wstawić do komórki o najmniejszym koszcie wielkość nasycającą popyt. W tym przypadku będzie to trasa C2. Efekt przekształceń przedstawiono w tabeli 5.

Tabela 5. Macierz transportowa po pierwszej iteracji w metodzie VAM

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	Podaż
D _A					100
D _B					120
D _C			80		80
Popyt	60	70	90	80	280 / 280

Źródło: Opracowanie własne

Następnie dla zredukowanej tablicy (z pominięciem wiersza C) należy powtórzyć zaprezentowany schemat postępowania co zaprezentowano w tabeli 6.

Tabela 6. Różnice kosztowe w metodzie VAM dla drugiej iteracji

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	ΔH
D _A	4	6	11	9	2
D _B	8	14	12	7	1
D _C					
ΔW	4	8	1	2	

Źródło: Opracowanie własne

Ponownie należy wyszukać wiersz lub kolumnę z różnicą o największej wartości. Tabela 7 przedstawia macierz transportową po wykonaniu drugiej iteracji.

Tabela 7. Macierz transportowa po drugiej iteracji w metodzie VAM

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	Podaż
D _A		70			100
D _B					120
D _C			80		80
Popyt	60	70	90	80	280 / 280

Źródło: Opracowanie własne

W dalszym etapie postępujemy analogicznie, co przedstawiono w tabeli 8.

Tabela 8. Różnice kosztowe w metodzie VAM dla trzeciej iteracji

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	ΔH
D _A					
D _B	8		12	7	1
D _C					
ΔW					

Źródło: Opracowanie własne

W rezultacie otrzymano następujące rozwiązanie bazowe zestawione w tabeli 9.

Tabela 9. Macierz transportowa po trzeciej iteracji w metodzie VAM

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	Podaż
D _A	30	70			100
D _B	30		10	80	120
D _C			80		80
Popyt	60	70	90	80	280
					280

Źródło: Opracowanie własne

Wartość funkcji celu dla tego rozwiązania wynosi:

$$Z_0 = 4 * 30 + 6 * 70 + 8 * 30 + 12 * 10 + 7 * 80 + 6 * 80 = 1940$$

Etap 2. Sprawdzenie optymalności rozwiązania oraz skonstruowanie rozwiązania optymalnego

Kolejnym etapem jest porównanie wyników początkowych rozwiązań bazowych rozpatrywanego przykładu, które zostały uzyskane trzema zaprezentowanymi metodami. Można zauważyć, że wartości funkcji celu są różne, co prezentuje tabela 10.

Tabela 10. Porównanie wartości funkcji celu uzyskanych dla różnych metod wyznaczenia początkowego rozwiązania bazowego

Lp.	Metoda obliczenia początkowego rozwiązania bazowego	Wartość funkcji celu
	Metoda kąta północno-zachodniego	3020
	Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów	2130
	Metoda VAM (<i>Vogel's Approximation Method</i>)	1940

Źródło: Opracowanie własne

Z powyższej tabeli 10 można odczytać, że przy pomocy metody VAM osiągnięto najmniejszą wartość funkcji celu. Nie rozwiązuje to jednak problemu czy uzyskana wartość funkcji celu jest optymalna. Należy zastosować metodę potencjałów, dzięki której można dokonać weryfikacji optymalności otrzymanego rozwiązania bazowego. Wykorzystuje ona wskaźniki optymalności, które są wyznaczone na podstawie znajomości potencjałów macierzy kosztów.

Krok 1

Można stwierdzić, że zamknięte zadanie transportowe ma charakter niezdegenerowany, jeżeli zachodzi następujące twierdzenie:

Każde dopuszczalne rozwiązanie bazowe zadania transportowego z m dostawcami i n odbiorcami ma dokładnie $m + n - 1$ zmiennych bazowych.

W metodzie minimalnego elementu macierzy oraz metodzie VAM, istnieje dokładnie sześć tras o wielkościach przewozowych większych od zera. Zatem można uznać to twierdzenie za spełnione, co sprawia, że podczas badania optymalności, potencjał u_A przyjmuje wartość 0, przez co zmniejsza się liczba potencjałów. Natomiast w metodzie kąta północno zachodniego otrzymano rozwiązanie niezdegradowane. Należy zatem zastosować metodę e-perturbacji w celu otrzymania sześciu tras przewozowych o wartości większej od zera.

Początkowe rozwiązanie bazowe metodą kąta północno-zachodniego po zastosowaniu metody kąta północno-zachodniego przedstawia tabela 11.

Tabela 11. Początkowe rozwiązanie bazowe

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	Podaż
D _A	60	0	40	0	100
D _B	0	0	40	80	120
D _C	0	70	10	0	80
Popyt	60	70	90	80	280
					280

Źródło: Opracowanie własne

Wartość funkcji celu dla tego rozwiązania wynosi:

$$Z_0 = 4 * 60 + 11 * 40 + 12 * 40 + 7 * 80 + 5 * 70 + 6 * 10 = 2130$$

Krok 2

Tablicę wskaźników optymalności buduje się zaczynając od wyliczenia potencjałów, gdzie koszt jest sumą potencjałów u i v . Znając koszty poszczególnych obciążonych tras oraz pamiętając, że potencjał u_A przyjmuje wartość 0, możemy wyznaczyć wszystkie pozostałe potencjały co zaprezentowano w tabeli 12.

Tabela 12. Wstępna sytuacja do wyznaczenia wartości poszczególnych potencjałów u_i i v_j dla początkowego rozwiązania bazowego wyznaczonego metodą kąta północno-zachodniego

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	Potencjał u_i
D _A	$k_{A1} = 4$	$k_{A2} = 6$	$k_{A3} = 11$	$k_{A4} = 9$	$u_A = 0$
D _B	$k_{B1} = 8$	$k_{B2} = 14$	$k_{B3} = 12$	$k_{B4} = 7$	u_B
D _C	$k_{C1} = 11$	$k_{C2} = 5$	$k_{C3} = 6$	$k_{C4} = 13$	u_C
Potencjał v_j	v_1	v_2	v_3	v_4	

Źródło: Opracowanie własne

Wartości poszczególnych potencjałów dla początkowego rozwiązania metodą kąta północno – zachodniego, będą odpowiednio równe:

$D_A O_1 = k_{A1} = 4$	to jeżeli	$v_1 + u_A = 4$	a	$u_A = 0$ to	$v_1 = 4$
$D_A O_3 = k_{A3} = 11$	to jeżeli	$v_3 + u_A = 11$	a	$u_A = 0$ to	$v_3 = 11$
$D_B O_3 = k_{B3} = 12$	to jeżeli	$v_3 + u_B = 12$	a	$v_3 = 11$ to	$u_B = 1$
$D_B O_4 = k_{B4} = 7$	to jeżeli	$v_4 + u_B = 7$	a	$u_B = 1$ to	$v_4 = 6$
$D_C O_3 = k_{C3} = 6$	to jeżeli	$v_3 + u_C = 6$	a	$v_3 = 11$ to	$u_C = -5$
$D_C O_2 = k_{C2} = 5$	to jeżeli	$v_2 + u_C = 5$	a	$u_C = -5$ to	$v_2 = 0$

Znając wszystkie potencjały, wyliczono wskaźniki optymalności dla tras o przepływie zerowym zgodnie ze wzorem:

$$\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - k_{ij}$$

Podstawiając wartości dla początkowego rozwiązania bazowego wyznaczonego metodą kąta północno – zachodniego, uzyskano odpowiednio:

$D_A O_2 = k_{A2} = 6$	to jeżeli	$u_A = 0$ oraz $v_2 = 0$	to $\Delta_{ij} = 0 + 0 - 6 = -6$
$D_A O_4 = k_{A4} = 9$	to jeżeli	$u_A = 0$ oraz $v_4 = 6$	to $\Delta_{ij} = 0 + 6 - 9 = -3$
$D_B O_1 = k_{B1} = 8$	to jeżeli	$u_B = 1$ oraz $v_1 = 4$	to $\Delta_{ij} = 1 + 4 - 8 = -3$
$D_B O_2 = k_{B2} = 14$	to jeżeli	$u_B = 1$ oraz $v_2 = 0$	to $\Delta_{ij} = 1 + 0 - 14 = -13$
$D_C O_1 = k_{C1} = 11$	to jeżeli	$u_C = -5$ oraz $v_1 = 4$	to $\Delta_{ij} = -5 + 4 - 11 = -12$
$D_C O_4 = k_{C4} = 13$	to jeżeli	$u_C = -5$ oraz $v_4 = 6$	to $\Delta_{ij} = -5 + 6 - 13 = -12$

W analogiczny sposób należy obliczyć wskaźniki optymalności dla dwóch pozostałych metod, za pomocą których wyznaczono początkowe rozwiązanie bazowe. Wyniki tych obliczeń zaprezentowano w tabelach: 13, 14, 15. Rozwiązanie jest optymalne, gdy wszystkie wskaźniki są mniejsze lub równe zero.

Tabela 13. Wskaźniki optymalności dla początkowego rozwiązania bazowego obliczonego na podstawie metody kąta północno – zachodniego

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	Potencjał u _i
D _A	u _{A1} = 0	u _{A2} = -6	u _{A3} = 0	u _{A4} = -3	u _A = 0
D _B	u _{B1} = -3	u _{B2} = -13	u _{B3} = 0	u _{B4} = 0	u _B = 1
D _C	u _{C1} = -12	u _{C2} = 0	u _{C3} = 0	u _{C4} = -12	u _C = -5
Potencjał v _j	v ₁ = 4	v ₂ = 0	v ₃ = 11	v ₄ = 6	

Źródło: Opracowanie własne

Tabela 14. Wskaźniki optymalności dla początkowego rozwiązania bazowego obliczonego na podstawie metody minimalnego elementu macierzy

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	Potencjał u _i
D _A	u _{A1} = 0	u _{A2} = -6	u _{A3} = 0	u _{A4} = -3	u _A = 0
D _B	u _{B1} = -3	u _{B2} = -13	u _{B3} = 0	u _{B4} = 0	u _B = 1
D _C	u _{C1} = -2	u _{C2} = 0	u _{C3} = 0	u _{C4} = -2	u _C = 5
Potencjał v _j	v ₁ = 4	v ₂ = 0	v ₃ = 11	v ₄ = 6	

Źródło: Opracowanie własne

Tabela 15. Wskaźniki optymalności dla początkowego rozwiązania bazowego obliczonego na podstawie metody VAM

	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	Potencjał u _i
D _A	u _{A1} = 0	u _{A2} = 6	u _{A3} = -3	u _{A4} = -6	u _A = 0
D _B	u _{B1} = 0	u _{B2} = -4	u _{B3} = 0	u _{B4} = 0	u _B = 4
D _C	u _{C1} = -9	u _{C2} = -1	u _{C3} = 0	u _{C4} = -12	u _C = -2
Potencjał v _j	v ₁ = 4	v ₂ = 6	v ₃ = 8	v ₄ = 3	

Źródło: Opracowanie własne

Na podstawie powyższych tabel można zauważyć, że dla początkowego rozwiązania bazowego obliczonego trzema metodami, tj. metodą kąta północno-zachodniego (tabela 13), metodą minimalnego elementu macierzy (tabela 14) oraz metodą VAM (tabela 15) wszystkie wskaźniki optymalności są niedodatnie. Można uznać rozwiązania powstałe na bazie tych metod za spełniające wymogi optymalności.

4. Podsumowanie

W niniejszym artykule założono określoną sieć dystrybucji, dla której przeprowadzono obliczenia trzema wybranymi metodami, tj. metodą kąta północno-zachodniego, metodą minimalnego elementu macierzy oraz metodą VAM. W efekcie uzyskano optymalne rozwiązanie końcowe dla wszystkich tych metod. Jednakże biorąc pod uwagę funkcję celu, rozumianą jako minimalny koszt przewozu, najlepsze rozwiązanie otrzymano dzięki metodzie VAM. Wartość funkcji celu dla tego rozwiązania osiągnęła najmniejszy wynik.

LITERATURA

1. Cyplik P., Głowacka – Fertsch D., fertsch M., *Logistyka przedsiębiorstw dystrybucyjnych*, Wyższa Szkoła Logistyki, Poznań 2008
2. Jacyna M., *Modelowanie i ocena systemów transportowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2009
3. Wojciechowski T., *Dystrybucja i logistyka na rynku towarowym*, WSZiM, Sochaczew 2010
4. Gołemska E., *Kompendium wiedzy o logistyce*, PWN, Warszawa 2010
5. Spyra Z., *Kanały dystrybucji. Kształtowanie relacji*, CeDeWu.pl, Warszawa 2007
6. Cyplik P., Głowacka D., Fertsch M., *Logistyka przedsiębiorstw dystrybucyjnych*, WSL, Poznań 2008