

**WYBRANE METODY PROGNOZOWANIA POPYTU NA PRZYKŁADACH
LICZBOWYCH
THE CHOSEN METHODS OF DEMAND FORECASTING ON NUMERICAL
EXAMPLES**

Jarosław ZIÓLKOWSKI

jaroslaw.zolkowski@wat.edu.pl

Dominika MISIUDA

dominika.misiuda@student.wat.edu.pl

Wojskowa Akademia Techniczna
Wydział Logistyki
Instytut Logistyki

Streszczenie: Celem artykułu było przedstawienie wybranych metod prognozowania popytu na przykładach liczbowych oraz zaproponowanie sprawdzenia trafności wyznaczonych prognoz. Szczególną uwagę zwrócono na metody wygładzenia szeregu czasowego.

Słowa klucze: prognozowanie, popyt.

Abstract: The purpose of this article is to present the chosen methods of demand forecasting on numerical examples and to check the accuracy of the forecast. The specific attention was put on the time series exponential smoothing models.

Key words: forecast, dem and.

WSTĘP

Prognozowanie popytu jest jednym z ważniejszych elementów planowania strategicznego. Prawidłowe ustalenie wielkości sprzedaży wspiera kierownictwo w podejmowaniu decyzji dotyczących działalności przedsiębiorstwa. Decyzje te, mogą być związane z wyborem rynku zbytu, czy rodzaju kampanii promocyjnej. Prognozowanie jest również istotnym źródłem informacji podczas optymalizacji procesów w przedsiębiorstwie, co pozwala zminimalizować generowane koszty przy jednoczesnym zwiększeniu efektywności firmy. Należy pamiętać, że na wielkość sprzedaży mają wpływ skomplikowane czynniki, których nie da się jednoznacznie i szczegółowo przewidzieć. Jednym z nich jest zmienność preferencji klienta, czy intensyfikacja działań konkurencji. Na prognoście spoczywa więc duża odpowiedzialność za dobór odpowiedniej metody, która pozwoli zachować trafność prognozy na wysokim poziomie. Wyznaczona wielkość popytu może być oceniona za pomocą błędów *ex ante* oraz błędów *ex post*. Pierwsza grupa błędów wyznaczana jest przed zaistnieniem okresu na który obliczana była prognoza i pozwala jedynie na oszacowanie jej trafności. Drugi rodzaj błędu pokazuje różnicę pomiędzy faktyczną realizacją zmiennej prognozowanej, a prognozą. Uwzględnianie prognoz przy generowaniu planów logistycznych (zaopatrzenia, produkcji, czy dystrybucji) daje podstawę do projektowania

i budowania elastycznych systemów reagowania na szybko zmieniające się potrzeby klienta. To wszystko pozwala przedsiębiorstwu zachować płynność finansową oraz dużą konkurencyjność na rynku (Misiuda, 2014).

Prognozowanie na podstawie szeregów czasowych polega na wnioskowaniu o tym jak będą kształtowały się wartości zmiennych w przyszłości na podstawie danych z przeszłości. Szereg czasowy jest uporządkowanym ciągiem zmiennych losowych o określonym rozkładzie prawdopodobieństwa odnoszących się do kolejnych jednostek czasu. W artykule skupiono się na wykorzystaniu modeli adaptacyjnych to znaczy takich, w których nie zakłada się regularności rozwoju zjawisk w czasie. Zaletą tych modeli jest to, że szybko przystosowują się do zachodzących zmian w sprzedaży. Należą do nich dwie grupy metod: metody naiwne oraz metody wygładzenia (wyrównania) szeregu czasowego. Przy czym metoda wygładzenia szeregu ma na celu usunięcie wahań przypadkowych i polega na powiązaniu obserwacji z przeszłych okresów z wagami wykładniczo zanikającymi. Oznacza to, że obserwacje z poprzednich okresów mają mniejszy wpływ na prognozę, niż obserwacje bliższe obecnej chwili. Szybkość zanikania wag, zależy od wyboru parametrów wygładzających. Liczba tych parametrów jest uwarunkowana doбором modelu prognozowania. Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie liczbowych przykładów z wykorzystaniem metod wyrównania wykładniczego – model Browna oraz model Holta. Do realizacji powyższego celu wykorzystano następujące metody badawcze: przegląd literatury w zakresie prognozowania popytu, analiza procesu prognozowania, metoda indywidualnych przypadków, synteza oraz wnioskowanie.

1. MODEL BROWNA

Zasada działania W tabeli 1 przedstawiono historyczną wielkość sprzedaży produktu A w przedsiębiorstwie XYZ w okresie 16 miesięcy. Prognoza na kolejny miesiąc została wyznaczona za pomocą modelu Browna, który stosowany jest, jeśli w szeregu czasowym występuje prawie stały poziom prognozowanej zmiennej oraz umiarkowane wahania przypadkowe. Z rysunku 1 można odczytać, że założenia do zadania zostały spełnione, ponieważ wartości oscylują wokół stałego poziomu. Widoczne jest również występowanie wahań przypadkowych. Prognozę na kolejny miesiąc wyznacza się z następującej zależności (Dittmann I., Dittmann P., Szabela – Pasierbińska E., Szpulak 2009):

$$y^*_t = \alpha \cdot y_{t-1} + (1 - \alpha) \cdot y^*_{t-1} \quad (1)$$

gdzie:

y^*_t – prognoza wyznaczona na okres t,

y^*_{t-1} – prognoza wyznaczona na okres t - 1,

y_{t-1} – wartość zmiennej prognozowanej w okresie t - 1,

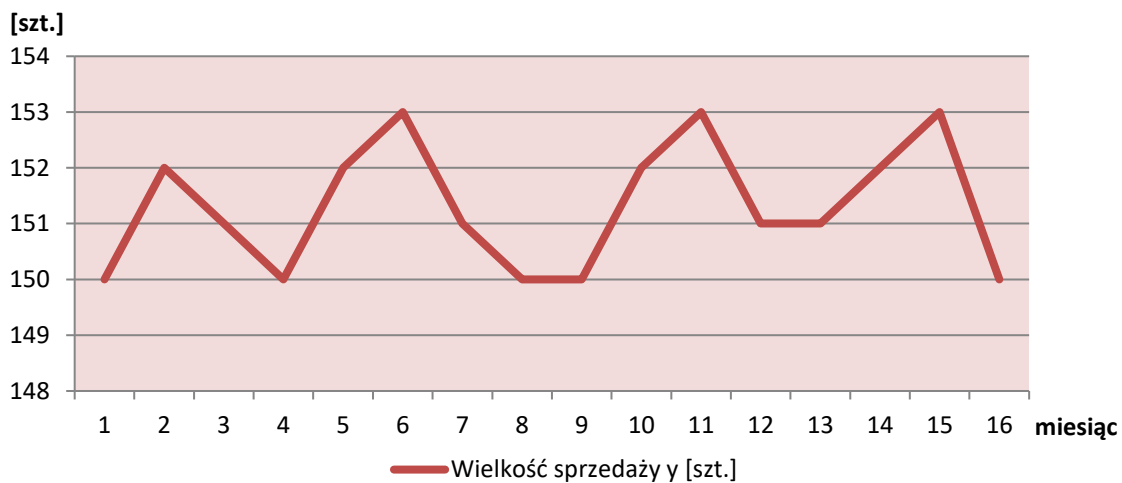
α – parametr wygładzenia przyjmujący wartości z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$.

Tabela 1. Wielkość sprzedaży produktu A

Miesiąc	Numer miesiąca	Wielkość sprzedaży y [szt.]
styczeń	1	150
luty	2	152
marzec	3	151
kwiecień	4	150
maj	5	152
czerwiec	6	153
lipiec	7	151
sierpień	8	150
wrzesień	9	150
październik	10	152
listopad	11	153
grudzień	12	151
styczeń	13	151
luty	14	152
marzec	15	153
kwiecień	16	150

Źródło: Opracowanie własne.

Cechy, jakimi charakteryzuje się szereg czasowy przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Wielkość sprzedaży produktu A

Źródło: Opracowanie własne.

Przystępując do rozwiązania zadania należy przyjąć wartość prognozy wygasłej w pierwszym miesiącu. Najczęściej przyjmuje się, że jest ona równa wartości początkowej zmiennej prognozowanej y_1 , lub oblicza się średnią arytmetyczną, np. z trzech pierwszych rzeczywistych wartości zmiennej prognozowanej. Rozwiązanie dla parametru wygładzania 0,5 przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Prognozy wygasłe dla parametru $\alpha = 0,5$

Miesiąc	Numer miesiąca	Wielkość sprzedaży y [szt.]	Prognozy wygasłe y^*
styczeń	1	150	150,00
luty	2	152	150,00
marzec	3	151	151,00
kwiecień	4	150	151,00
maj	5	152	150,50
czerwiec	6	153	151,25
lipiec	7	151	152,13
sierpień	8	150	151,56
wrzesień	9	150	150,78
październik	10	152	150,39
listopad	11	153	151,20
grudzień	12	151	152,10
styczeń	13	151	151,55
luty	14	152	151,27
marzec	15	153	151,64
kwiecień	16	150	152,32

Źródło: Opracowanie własne.

Wartość parametru wygładzania została przyjęta losowo, dlatego trafność prognozy została sprawdzona za pomocą średniego absolutnego błędu procentowego prognozy ω (MAPE) (Dittmann I., Dittmann P., Szabela – Pasierbińska E., Szpulak 2009):

$$\omega = \frac{1}{T-n} \sum_{t=n+1}^T \left| \frac{y_t - y_t^*}{y_t} \right| \cdot 100\% \quad (2)$$

gdzie:

n - numer ostatniej znanej obserwacji zmiennej prognozowanej,

T - numer ostatniego okresu, dla którego była sprawdzana prognoza.

Wartość błędu w tym przypadku wyniosła 0,84%, oznacza to, że wyznaczone prognozy wygasłe różnią się od rzeczywistej wielkości sprzedaży średnio o 0,84%. Po optymalizacji parametru wygładzania za pomocą dodatku *Solver* otrzymano wartość $\alpha = 0,13$. Jako funkcję celu dążącą do minimum przyjęto wartość błędu MAPE. Warunki ograniczające wynikają z tego, że parametr α może przyjmować wartości jedynie z przedziału $< 0, 1 >$. Wartości prognoz wygasłych dla parametru $\alpha = 0,13$ przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3. Prognozy wygasłe dla parametru $\alpha = 0,13$

Miesiąc	Numer miesiąca	Wielkość sprzedaży y [szt.]	Prognozy wygasłe y*
styczeń	1	150	150,00
luty	2	152	150,00
marzec	3	151	150,25
kwiecień	4	150	150,34
maj	5	152	150,30
czerwiec	6	153	150,51
lipiec	7	151	150,83
sierpień	8	150	150,85
wrzesień	9	150	150,74
październik	10	152	150,65
listopad	11	153	150,82
grudzień	12	151	151,09
styczeń	13	151	151,08
luty	14	152	151,07
marzec	15	153	151,19
kwiecień	16	150	151,41
maj	17		151,24

Źródło: Opracowanie własne.

Po optymalizacji średni absolutny błąd procentowy wyniósł 0,74%, a prognoza sprzedaży produktu A na kolejny miesiąc 151 sztuk. Wartości błędu kształtuje się na bardzo niskim poziomie, stąd wniosek, że metoda prognozowania jest dobrana poprawnie, a jej trafność jest bardzo wysoka.

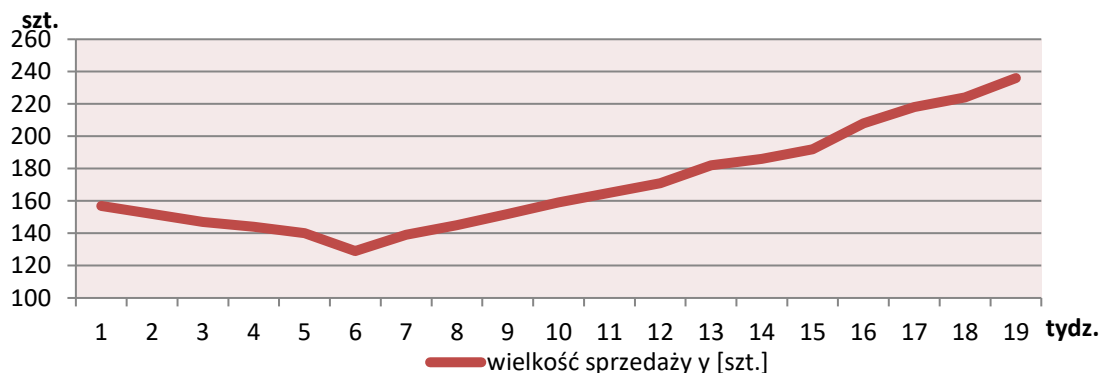
2. MODEL HOLTA

W tabeli 4 oraz na rysunku 2 przedstawiono tygodniową wielkość sprzedaży produktu B w przedsiębiorstwie XYZ. Podstawowym założeniem jest fakt, iż model wyrównania wykładniczego Holta wykorzystywany jest do prognozowania wtedy, gdy w szeregu czasowym występuje trend i wahania przypadkowe.

Tabela 4. Wielkość sprzedaży produktu B

Numer tygodnia	Wielkość sprzedaży y [szt.]
1	157
2	152
3	147
4	144
5	140
6	129
7	139
8	145
9	152
10	159
11	165
12	171
13	182
14	186
15	192
16	208
17	218
18	224
19	236

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 2. Wielkość sprzedaży produktu B

Źródło: Opracowanie własne.

Model Holta składa się z trzech równań (Dittmann I., Dittmann P., Szabela – Pasierbińska E., Szpulak 2009):

- wyrównania danych:

$$F_{t-1} = \alpha \cdot y_{t-1} + (1 - \alpha) \cdot (F_{t-2} + S_{t-2}) \quad (3)$$

- wyrównania trendu:

$$S_{t-1} = \beta \cdot (F_{t-1} - F_{t-2}) + (1 - \beta) \cdot S_{t-2} \quad (4)$$

- wyznaczenia prognozy:

$$y_t^* = F_n + (t - n) \cdot S_n \quad (5)$$

gdzie:

F_{t-1}, F_{t-2} - wygładzona wartość średniej prognozowanej na okres $t - 1$ oraz $t - 2$;

S_{t-1}, S_{t-2} - wygładzona wartość przyrostu trendu na okres $t - 1$ oraz $t - 2$;

α, β - parametry modelu o wartościach z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$;

y_{t-1} - ostatnia realizacja zmiennej w okresie $t-1$;

y_t^* - prognoza wyznaczona na moment t ;

F_n - wygładzona wartość zmiennej prognozowanej na okres n ;

S_n - wygładzona wartość przyrostu trendu w okresie n ;

N - liczba wyrazów szeregu czasowego zmiennej prognozowanej.

Tabela 5. Obliczone wartości F_t, S_t, y_t^*

Numer tygodnia	Wielkość sprzedaży y [szt.]	F_t	S_t	y_t^*
1	157	157,00	-5,00	
2	152	152,00	-5,00	152,00
3	147	147,00	-5,00	147,00
4	144	143,00	-4,50	142,00
5	140	139,25	-4,13	138,50
6	129	132,06	-5,66	135,13
7	139	132,70	-2,51	126,41
8	145	137,60	1,19	130,20
9	152	145,40	4,50	138,79
10	159	154,45	6,77	149,89
11	165	163,11	7,72	161,22
12	171	170,91	7,76	170,83
13	182	180,34	8,59	178,68
14	186	187,47	7,86	188,93
15	192	193,66	7,03	195,33
16	208	204,35	8,86	200,69
17	218	215,60	10,06	213,20
18	224	224,83	9,64	225,66
19	236	235,23	10,02	234,47
20				245,26

Źródło: Opracowanie własne.

W tabeli 5 zestawiono obliczenie dotyczące wyrównania danych (F_t), wyrównanie trendu (S_t) oraz wyznaczenia prognozy (y_t^*). Przedstawione wartości uzyskane w wyniku podstawienia odpowiednich danych do równań modelu. Tak jak w poprzednim przypadku przyjęto, że wartości parametrów α oraz β są równe 0,5. Dla tak przyjętych założeń, prognoza

na kolejny tydzień wynosi 245 sztuk produktu. Oceny trafności prognozy dokonano za pomocą pierwiastka średnio kwadratowego błędu s^* (RMSE) (Maciąg A., Pietroń R., Kukła S., 2013):

$$s^{*2} = \frac{1}{T-n} \sum_{t=n+1}^T (y_t - y_t^*)^2 \quad (6)$$

$$s^* = \sqrt{s^{*2}} \quad (7)$$

gdzie:

s^{*2} – średni kwadratowy błąd prognoz wygasłych.

Wartość błędu wyniosła 6,69 co oznacza, że wyznaczone prognozy wygasłe różnią się od rzeczywistej wielkości sprzedaży średnio o 7 sztuk. Błąd ten stanowi ok. 3,90% średniej wielkości sprzedaży. Podobnie jak w poprzednim przypadku również dokonano optymalizacji parametrów za pomocą dodatku *Solver*.

Tabela 6 przedstawia prognozy wyznaczone z uwzględnieniem optymalnych wartości parametrów wygładzania.

Ponownie parametry wygładzania dobierane były tak, aby błąd prognozy był jak najmniejszy, dlatego jako funkcję celu dążącą do minimum przyjęto wartość błędu RMSE. Warunki ograniczające związane są z wartościami jakie mogą przyjmować parametry α oraz β . W wyniku optymalizacji otrzymano:

- wartości parametrów po optymalizacji: $\alpha = 0,85$ oraz $\beta = 0,55$;
- wyznaczona prognoza na tydzień 20 wynosi 246 sztuk;
- pierwiastek średnio kwadratowego błędu prognozy wyniósł 5,59 szt., co stanowi około 3,26% średniej wielkości sprzedaży w miesiącach od drugiego do dziewiętnastego.

Błędy RMSE dla prognoz wyznaczonych metodą wygładzenia wykładniczego Holta są niewielkie, dlatego model ten może być wykorzystywany do prognozowania wielkości sprzedaży produktu B.

Tabela 6. Obliczone wartości F_t , S_t , y_t^* dla optymalnych wartości parametrów α oraz β

Numer tygodnia	Wielkość sprzedaży y [szt.]	F_t	S_t	y_t^*
1	157	157,00	-5,00	
2	152	152,00	-5,00	152,00
3	147	147,00	-5,00	147,00

4	144	143,69	-4,06	142,00
5	140	139,94	-3,89	139,63
6	129	130,09	-7,19	136,05
7	139	136,51	0,35	122,90
8	145	143,74	4,17	136,86
9	152	151,37	6,08	147,90
10	159	158,76	6,81	157,45
11	165	165,09	6,54	165,57
12	171	171,10	6,25	171,63
13	182	181,28	8,43	177,35
14	186	186,57	6,69	189,71
15	192	192,20	6,10	193,27
16	208	206,50	10,65	198,29
17	218	217,87	11,05	217,14
18	224	224,76	8,74	228,91
19	236	235,61	9,91	233,51
20				245,53

Źródło: Opracowanie własne.

3. PODSUMOWANIE

Zaprezentowane metody prognozowania pozwalają z dużą skutecznością określić jak będzie kształtowała się wielkość sprzedaży w przyszłych okresach. Nie można jednak zapomnieć, że każda prognoza obarczona jest błędami wynikającymi z niezależnych od przedsiębiorstwa zmian na rynku, stąd konieczność weryfikacji otrzymanych wartości za pomocą odpowiednich wskaźników błędów. W celu poprawy trafności prognozowania popytu przedsiębiorstwa powinny dążyć do większej integracji w łańcuchu logistycznym. Pozwoli to na sprawny przepływ i wymianę danych oraz informacji niezbędnych do poprawnej konstrukcji modelu prognozowania.

W wyniku przeprowadzonych analiz sformułowano następujące wnioski końcowe:

- 1) Dla modelu BROWNA prognoza sprzedaży na kolejny miesiąc wyniosła 151 sztuk (wartość błędu wyniosła zaledwie 0,74 % co świadczy o wysokiej trafności doboru metody prognozowania).

- 2) Dla modelu HOLTA po optymalizacji przy uwzględnienia parametrów $\alpha = 0,85$ i $\beta = 0,55$ wyznaczona prognoza na tydzień 20 wyniosła 246 sztuk przy niewielkiej wartości błędu RMSE wynoszącego 3,26 %.

LITERATURA

- [1] Dittmann, I. Dittmann, P. Szabela – Pasierbińska, E. Szpulak, A. (2009). *Prognozowanie w zarządzaniu przedsiębiorstwem*. Kraków: Oficyna.
- [2] Misiuda, D. (2014). *Wybrane metody ilościowe stosowane w sferze dystrybucji*. Praca inżynierska, Warszawa: WAT.
- [3] Maciąg, A. Pietroń, R. Kukła, S. (2013). *Prognozowanie i symulacja w przedsiębiorstwie*. Warszawa: PWE.